Algebra I
Übungsblatt 3

... in the abstract theory it often pays to switch back from the abstract point of view to the concrete one of transformation groups. For one thing, the use of transformation groups provides a counting technique that plays an important role in the theory of finite groups....

It is useful to have a vehicle for passing from the abstract point of view to the concrete one of transformations. This is provided by the concept of a group acting on a set which we proceed to define. The idea is a simple one. We begin with an abstract group G and we are interested in the various "realizations" of G by groups of transformations. At first one is tempted to consider only those realizations which are "faithful" in the sense that they are isomorphisms of G with groups of transformations. Experience soon shows that it is preferable to broaden the outlook to encompass also homomorphisms of G into transformation groups.

(Nathan Jacobson: Basic Algebra I)

Mathematics is rich in technique and arguments. In this great variety one of the most basic tools is counting. Yet, strangely enough, it is one of the most difficult.

(Israel Herstein: Topics in Algebra)

Aufgabe 1: Sei $\alpha: G \times M \to M$ eine Operation der Gruppe G auf der Menge M. Zeigen Sie, dass

$$T: G \to \mathrm{Bij}(M, M) \quad , \quad g \mapsto (T_g: m \mapsto \alpha(g, m))$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Dazu müssen Sie insbesondere zeigen, dass tatsächlich in die Menge der Bijektionen abgebildet wird. Zeigen Sie weiter, dass auch umgekehrt jeder Gruppenhomomorphismus $T: G \to \mathrm{Bij}(M, M)$ eine Operation von G auf M definiert. Welche Eigenschaft hat der Homomorphismus T, wenn die Gruppenoperation treu ist?

Aufgabe 2:

a) Sei G eine Gruppe mit 9 Elementen. Wie viele Teilmengen besitzt die Menge G? Wie viele davon enthalten das neutrale Element? Welche Anzahl Elemente darf eine Teilmenge enthalten, damit sie im Einklang mit dem Satz von Lagrange zu einer Untergruppe von G gehören kann? Wie viele Teilmengen mit neutralem Element gibt es zu der jeweiligen Anzahl?

b) Zeigen Sie, dass eine Untergruppe vom Index zwei ein Normalteiler ist.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie alle Untergruppen und Normalteiler von S_3.

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n für $n \neq 2$ trivial ist. Diskutieren Sie auch den Fall $n = 2$.

b) Sei k eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung p^k ein nichttriviales Zentrum besitzt. (Tipp: Klassengleichung)

Aufgabe 5: Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung p^2 abelsch ist.