Zu Blatt 11, Aufgabe 1

Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist $3x^2 + 2nx + 12$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$?

Idee: Prüfe, für welche $n \in \mathbb{Z}$ das Polynom reduzibel [!] über $\mathbb{Z}$ ist. Ist ein Polynom reduzibel über $\mathbb{Z}$, so ist es automatisch auch reduzibel über $\mathbb{Q}$. Da das Polynom positiven Grad besitzt, folgt mit dem Satz von Gauß, dass das Polynom für alle anderen Werte von $n \in \mathbb{Z}$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

Ansatz für Reduziblität:

$$3x^2+2nx+12 = (ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd \quad \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{Z}\ .$$

Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$ac = 3 \quad , \quad ad+bc = 2n \quad , \quad bd = 12\ .$$

Da eine Faktorisierung nur eindeutig bis auf Reihenfolge und Multiplikation mit Einheiten ist (Einheiten in $\mathbb{Z}$ sind ± 1), können wir aufgrund der ersten Gleichung ($3 = 3 \cdot 1 = (-3)(-1) = 1 \cdot 3 = (-1)(-3)$) oBdA $a = 3$, $c = 1$ annehmen. Damit sind dann Reihenfolge und Einheiten festgelegt! Das Gleichungssystem vereinfacht sich nun zu

$$3d + b = 2n \quad , \quad bd = 12\ .$$

Aus der ersten Gleichung folgt: Entweder sind b und d beide gerade oder beide ungerade. Aus der zweiten Gleichung folgt

$$(b,d) \in \{\pm(1,12), \pm(2,6), \pm(3,4), \pm(4,3), \pm(6,2), \pm(12,1)\}\ .$$

Beachte, dass die Reihenfolge in den angegebenen Paaren nicht vernachlässigt werden darf, da die Reihenfolge der Faktoren bereits oben festgelegt worden ist. Mit den Informationen aus beiden Gleichungen bleiben nur noch vier Fälle, die auf ein reduzibles Polynom führen:

- $b = 2$, $d = 6$. Die Werte führen auf das reduzible Polynom mit $n = 10$.
- $b = -2$, $d = -6$ liefern das reduzible Polynom mit $n = -10$.
- $b = 6$, $d = 2$ liefern das reduzible Polynom mit $n = 6$.
- $b = -6$, $d = -2$ liefern das reduzible Polynom mit $n = -6$.

Alle anderen ganzen Zahlen, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 6, \pm 10\}$, bestimmen ein irreduzibles Polynom.