Zu Blatt 1, Aufgabe 5: Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks

Ich nenne die Punkte $A = (1, 0)$, $B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ und $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Die Symmetrien des Dreiecks können als Permutationen der Menge $\{A, B, C\}$ beschrieben werden (vgl. Übung). Im Folgenden soll gezeigt werden, dass alle sechs Permutationen tatsächlich durch Symmetrien realisierbar sind. Insbesondere werden dazu die Symmetrien, also orthogonale Abbildungen, konkret durch ihre darstellenden Matrizen $\mathcal{M}(\cdot)$ bezüglich der Standardbasis $e_1 = (1, 0)^T$ und $e_2 = (0, 1)^T$ angegeben.

1. Identität:
$$A \mapsto A, \quad B \mapsto B, \quad C \mapsto C \quad ; \qquad \mathcal{M}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Drehung um Ursprung mit Winkel $2\pi/3$:
$$A \mapsto B, \quad B \mapsto C, \quad C \mapsto A \quad ; \qquad \mathcal{M}(R) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

   Tipp: Diese und die folgenden Matrizen lassen sich leicht aufstellen. Die erste Spalte ist der Bildvektor von e_1, also das Bild des Punktes A (Hier $R(A) = B$). Da die Matrix eine 2×2 Orthogonalmatrix ist, ergibt sich die zweite Spalte durch Vertauschung der Komponenten der ersten Spalte, wobei zusätzlich in einer Komponente das Vorzeichen umgekehrt werden muss. Welches Vorzeichen umzukehren ist, ergibt sich daraus, dass Drehungen die Determinante 1, Spiegelungen die Determinante -1 besitzen.

3. Drehung um Ursprung mit Winkel $4\pi/3$:
$$A \mapsto C, \quad B \mapsto A, \quad C \mapsto B \quad ; \qquad \mathcal{M}(R^2) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

4. Spiegelung an Ursprungsgeraden durch A:
$$A \mapsto A, \quad B \mapsto C, \quad C \mapsto B \quad ; \qquad \mathcal{M}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Spiegelung an Ursprungsgeraden durch B:
$$A \mapsto C, \quad B \mapsto B, \quad C \mapsto A \quad ; \qquad \mathcal{M}(RS) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

6. Spiegelung an Ursprungsgeraden durch C:
$$A \mapsto B, \quad B \mapsto A, \quad C \mapsto C \quad ; \qquad \mathcal{M}(R^2\,S) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Für die Verknüpfungen gilt $R \neq I$, $R^2 \neq I$, $R^3 = S^2 = I$ und $R\,S = S\,R^{-1}$ (vgl. Blatt 1, Aufgabe 2), woraus sich die Gruppentafel aufstellen lässt. Schreibt man daneben die Gruppentafel der Permutationen, so sieht man, dass die oben angegebene Korrespondenz zwischen Symmetrien und Permutationen ein Isomorphismus definiert. Einfacher ergibt sich das daraus, dass die Permutationen die Einschränkungen der Symmetrien auf die Punktmenge $M := \{A, B, C\}$ darstellen, und es gilt z.B.

$$(R\,S)|_M = R|_M\, S|_M \ .$$

Verallgemeinerungsmöglichkeiten: Es gibt zwei Parameter in der Aufgabe, nämlich die Anzahl der Ecken und die Dimension des Raumes. Man kann die Aufgabenstellung für regelmäßige n-Ecke im zweidimensionalen Raum betrachten oder für n-Simplizes (n-dimensionales Analogon zum Dreieck – $n+1$ Ecken, alle benachbart, z.B. Tetraeder im dreidimensionalen Raum) im n-dimensionalen Raum. Bei der ersten Betrachtung ist die Symmetriegruppe für $n > 2$ einer echten Untergruppe der Permutationen isomorph, bei der zweiten der vollständigen Permutationsgruppe. Diese Isomorphie-Aussagen ergeben sich daraus, dass Symmetrien benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken abbilden müssen (vgl. Übung).

Beachte, die Gruppe der Permutationen heißt *symmetrische Gruppe*.