Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1. a) Es ist zu zeigen, dass das linksneutrale Element e auch rechtsneutral ist und dass die linksinversen Elemente auch rechtsinvers zum jeweiligen Element sind.

Sei $a \in G$ und a' ein linksinverses Element von a. Sei weiter a'' ein linksinverses Element von a'. Dann gilt

$$a\,a' = e\,(a\,a') = (a''\,a')(a\,a') = a''(a'\,a)a' = a''\,e\,a' = a''(e\,a') = a''\,a' = e\ ,$$

also ist a' auch rechtsinvers zu a. *Wie findet man diese Gleichungskette? Wir müssen zeigen $a\,a' = e$. Zwar können wir von beiden Seiten multiplizieren, aber lediglich bei der Linksmultiplikation gibt es brauchbare Voraussetzungen.*

Nun zum linksneutralen Element: Wir verwenden die soeben gezeigte Eigenschaft, dass Linksinverse auch rechtsinvers sind und erhalten

$$a\,e = a\,(a'\,a) = (a\,a')\,a = e\,a = a\ .$$

Das linksneutrale Element ist folglich auch rechtsneutral.

b) *Beachte: Nur die Lösbarkeit der Gleichungen, nicht die Eindeutigkeit der Lösung, wird in diesem Beweis benötigt.*

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $a \in G$ ein $e_a \in G$ als Lösung der Gleichung

$$e_a\,a = a\ .$$

Damit gibt es zu jedem Element ein Linksneutrales. Wir müssen zeigen, dass es ein Element gibt, welches zu allen Elementen linksneutral ist. Sei $b \in G$. Nach Voraussetzung gibt es ein $c \in G$ als Lösung der Gleichung

$$b = a\,c\ .$$

Damit gilt

$$e_a\,b = e_a(a\,c) = (e_a\,a)c = a\,c = b\ .$$

Das Element $e := e_a$ ist somit linksneutral zu jedem beliebigen Element $b \in G$. Schließlich gibt es zu jedem $a \in G$ ein Linksinverses $a' \in G$ als Lösung der Gleichung

$$a'\,a = e\ .$$

Damit sind die Voraussetzungen von Aufgabenteil a) nachgewiesen. Mit dem obigen Beweis folgt, dass G eine Gruppe ist.

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 2

Aufgabe 2. a) *Vgl. Beweis von Satz 1.11 b) der Vorlesung.*

Die (Links-)Nebenklassen der Untergruppe H bilden eine Partition der Menge G, denn zwei Nebenklassen sind entweder gleich oder disjunkt. Auch sind alle Nebenklassen gleichmächtig zur Untergruppe H, weil die Linkstranslation $\lambda_g \colon H \to g\,H, h \mapsto g\,h$ bijektiv ist. *(Das gilt ebenfalls für unendliche Gruppen und Untergruppen.)*

Da G endlich ist, ist auch H endlich und die Menge G ist als disjunkte Vereinigung endlich vieler Nebenklassen darstellbar,

$$G = H \cup g_2\,H \cup \ldots \cup g_i\,H\ .$$

Da die Vereinigung disjunkt ist, folgt

$$|G| = |H| + |g_2\,H| + \ldots + |g_i\,H| = i \cdot |H|\ .$$

[Das Symbol $|H|$ ist synonym zu $\#\,H$, bezeichnet also die Ordnung der (Unter-)Gruppe.]

b) *Es wäre besser gewesen, wenn ich explizit gefordert hätte, dass H nichtleer sein soll. Die leere Menge wird häufig auch als endliche Menge angesehen.*

Sei $h \in H$. Nach Voraussetzung enthält H alle Potenzen

$$h, h^2, h^3, h^4, \ldots$$

Da H endlich ist, muss diese unendliche Folge doppelte Elemente enthalten, sagen wir $h^i = h^j$ mit $i < j$. Dann sind $h^{j-i} = e$ und $h^{-1} = h^{j-i-1}$, falls $j - i > 1$, ebenfalls in der Folge enthalten. Ist $j - i = 1$, so ist $h^1 = e$ selbstinvers und in ebenfalls in der Folge enthalten. Die nichtleere Teilmenge H ist mithin unter Produktbildung und Inversenbildung abgeschlossen, d.h. eine Untergruppe.