Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 5, Aufgabe 1

Aufgabe 1: Sei $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$. Seien $V := (\{e, a, b, c\}, \cdot)$ die abstrakte Kleinsche Vierergruppe und

$$\sigma\colon a \mapsto a,\ \ b \mapsto c,\ \ c \mapsto b$$

ein Automorphismus von V. Sei weiter $\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(V),\ \ \bar{1} \mapsto \sigma$. Geben Sie konkret die Verknüpfungsvorschrift des semidirekten Produkts $V \times_\varphi \mathbb{Z}_2$ an und stellen Sie die Gruppentafel auf. Ist $V \times_\varphi \mathbb{Z}_2$ abelsch? Bestimmen Sie den Exponenten der Gruppe. Ist $V \times_\varphi \mathbb{Z}_2$ isomorph zum direkten Produkt $V \times \mathbb{Z}_2$?

Die Verknüpfungsvorschrift lautet

$$(V \times_\varphi \mathbb{Z}_2) \times (V \times_\varphi \mathbb{Z}_2) \to V \times_\varphi \mathbb{Z}_2 \quad , \quad ((g, \bar{k}), (h, \bar{l})) \mapsto (g\,\varphi(\bar{k})(h), \bar{k} + \bar{l})\ .$$

(Beachte, dass $\mathbb{Z}_2$ üblicherweise additiv geschrieben wird.) Damit ergibt sich die folgende Gruppentafel:

	(e,0)	(a,0)	(b,0)	(c,0)	(e,1)	(a,1)	(b,1)	(c,1)
(e,0)	(e,0)	(a,0)	(b,0)	(c,0)	(e,1)	(a,1)	(b,1)	(c,1)
(a,0)	(a,0)	(e,0)	(c,0)	(b,0)	(a,1)	(e,1)	(c,1)	(b,1)
(b,0)	(b,0)	(c,0)	(e,0)	(a,0)	(b,1)	(c,1)	(e,1)	(a,1)
(c,0)	(c,0)	(b,0)	(a,0)	(e,0)	(c,1)	(b,1)	(a,1)	(e,1)
(e,1)	(e,1)	(a,1)	(c,1)	(b,1)	(e,0)	(a,0)	(c,0)	(b,0)
(a,1)	(a,1)	(e,1)	(b,1)	(c,1)	(a,0)	(e,0)	(b,0)	(c,0)
(b,1)	(b,1)	(c,1)	(a,1)	(e,1)	(b,0)	(c,0)	(a,0)	(e,0)
(c,1)	(c,1)	(b,1)	(e,1)	(a,1)	(c,0)	(b,0)	(e,0)	(a,0)
Ordnung	1	2	2	2	2	2	4	4

Es gilt z.B. $(b, \bar{1})(a, \bar{1}) \neq (a, \bar{1})(b, \bar{1})$, also ist dieses semidirekte Produkt nicht abelsch (vgl. auch Vorlesung: $\varphi \neq id$). Der Exponent ist 4. Dieses semidirekte Produkt ist nicht isomorph zum direkten Produkt $V \times \mathbb{Z}_2$, da das direkte Produkt zweier abelscher Gruppen abelsch ist.