Lösungen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Sei G eine Gruppe und n eine natürliche Zahl. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Gilt $(ab)^2 = a^2b^2$ für alle $a, b \in G$, so ist G abelsch.

b) Gilt $(ab)^i = a^ib^i$ für alle $a, b \in G$ und $i \in \{n, n+1, n+2\}$, so ist G abelsch.

a) Schreibt man die gegebene Gleichung aus, so erhält man $abab = aabb$. Multiplikation von links mit a^{-1} und von rechts mit b^{-1} liefert $ba = ab$.
b) Aus den vorgegebenen Gleichungen

$$(ab)^n = a^nb^n \quad , \qquad (ab)^{n+1} = a^{n+1}b^{n+1} \quad , \qquad (ab)^{n+2} = a^{n+2}b^{n+2}$$

erhält man wie in Aufgabenteil a) die Gleichungen

$$(ba)^{n-1} = a^{n-1}b^{n-1} \quad , \qquad (ba)^n = a^nb^n \quad , \qquad (ba)^{n+1} = a^{n+1}b^{n+1} \ .$$

Damit gilt

$$(ba)(ba)^n = (ba)^{n+1} = a^{n+1}b^{n+1} = (ab)^{n+1} = (ab)(ab)^n \ .$$

In dieser Gleichung lässt sich $(ba)^n = a^nb^n = (ab)^n$ kürzen, und man erhält $ba = ab$.

Aufgabe 2: Beweisen Sie, dass die Gruppe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ *lokal-zyklisch* ist, d.h. jede endlich erzeugte Untergruppe ist zyklisch. Ist $\mathbb{Q}$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe?

Jede endlich erzeugte Untergruppe U von $\mathbb{Q}$ besitzt eine Darstellung $U = \langle \frac{z_1}{n_1}, \dots, \frac{z_r}{n_r} \rangle$. Es gilt $U \subseteq \langle \frac{1}{n_1 \cdots n_r} \rangle$. Als Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist U also zyklisch.

Jede endlich erzeugte Untergruppe ist - wie eben gesehen - zyklisch, also von der Form $\langle \frac{z}{n} \rangle$. Es gilt $\frac{1}{2n} \notin \langle \frac{z}{n} \rangle$. Folglich ist $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt.

Aufgabe 3: Sei p eine Primzahl. Die (Abstraktion der) Untergruppe $Z(p^\infty) := \langle \frac{1}{p^k} : k \in \mathbb{N} \rangle \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ heißt *quasizyklische Gruppe* zur Primzahl p.

a) Zeigen Sie, dass $Z(p^\infty)$ eine unendliche p-Gruppe ist. Ist sie zyklisch?

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $Z(p^\infty)$. Welche davon sind zyklisch?

c) Bestimmen Sie alle Faktorgruppen von $Z(p^\infty)$.

d) Ist $Z(p^\infty)$ lokal-zyklisch (vgl. Aufgabe 2)? Zeigen Sie, dass $Z(p^\infty)$ eine abelsche Gruppe ist, die nicht endlich erzeugt ist.

[vgl. Übung] *Aufgabenteil b) kann noch etwas eleganter gelöst werden - Herzlichen Dank an Sven Badke für den Hinweis!* Sei U eine Untergruppe. Definiere K wie in Übung. Der Fall $|K| = \infty$ bleibt unverändert. Sei nun $K = \{0, 1, \ldots, \bar{k}\}$. Sei $\frac{z}{p^{\bar{k}}} + \mathbb{Z} \in U$ mit $(z, p) = 1$. Dieses Element besitzt die Ordnung $p^{\bar{k}}$, also ist auch $\frac{1}{p^{\bar{k}}} + \mathbb{Z} \in U$. Folglich ist $U = Z(p^{\bar{k}})$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie das Zentrum der Diedergruppe D_n. Geben Sie eine nicht-kommutative p-Gruppe an.

Verwende die Definition

$$D_n := \langle s, d \mid s^2 = 1 = d^n, s\,d = d^{-1}\,s \rangle \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Der Fall $n = 2$ passt nicht mehr zur Definition als Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks; bei der Definition durch Erzeugende und Relationen ist er aber durchaus sinnvoll. Die nachfolgende Rechnung zeigt auch die Bedeutung dieses Sonderfalls der Diedergruppe.

Jedes Element von D_n besitzt eine Darstellung $d^k\,s^l$ mit $0 \leq k < n$, $0 \leq l \leq 1$. Sei $z \in Z(D_n)$.

1. Fall: Sei z von der Form $d^k\,s^0 = d^k$ mit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Als Zentrumselement muss z mit allen Gruppenelementen vertauschen. Äquivalent dazu, z muss mit den Erzeugenden s und d vertauschen. Letzteres folgt sofort daraus, dass $\langle d \rangle$ eine abelsche Untergruppe ist. Die Vertauschbarkeit mit s liefert die Bedingung $d^k\,s = s\,d^k = d^{-k}\,s$, also $d^{2k} = 1$ und $n \mid 2k$. Dieser Fall liefert somit: Ist n ungerade, so besitzt D_n kein Zentrumslement der Form d^k (ausgenommen $d^0 = 1$). Ist n gerade, so gilt $Z(D_n) \cap \langle d \rangle = \{1, d^{n/2}\}$.

2. Fall: Sei z von der Form $d^k\,s$.
Die Vertauschbarkeit mit s liefert $d^k = d^k\,s\,s = s\,d^k\,s = d^{-k}\,s\,s = d^{-k}$, also wie oben $d^{2k} = 1$. Die Vertauschbarkeit mit d führt zu der Bedingung $d^{k+1}s = d^k\,s\,d = d^{k-1}\,s$, d.h. $d^2 = 1$. Damit $n = 2$.

Wir erhalten

$$Z(D_n) = \begin{cases} D_2 & \text{, falls } n = 2 \\ \{1, d^{n/2}\} & \text{, falls } n = 4, 6, 8, \ldots \\ \{1\} & \text{, falls } n = 3, 5, 7, \ldots \end{cases}$$

Aufgabe 5: Eine Gruppe $G \neq \{e\}$ heißt *einfach*, wenn $\{e\}$ und G ihre (einzigen) Normalteiler sind (vgl. Primzahldefinition).

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Konjugationsklassen der alternierenden Gruppe A_5 (Tipp: disjunkte Zykeldarstellung).

2. Zeigen Sie, ein Normalteiler ist eine Untergruppe, die Vereinigung von Konjugationsklassen ist.

3. Zeigen Sie, dass A_5 einfach ist.

[vgl. Übung]