Lösung zu Übungsblatt 7, Aufgabe 4

Aufgabe 4: Sei G eine Gruppe und $G^{(1)} := G'$ ihre Kommutatorgruppe. Definiere induktiv $G^{(n+1)} := (G^{(n)})'$ für $n \geq 1$. Daraus ergibt sich die Inklusionskette

$$G \supseteq G' \supseteq G^{(2)} \supseteq G^{(3)} \supseteq \ldots$$

a) Sei N ein Normalteiler von G. Zeigen Sie, $(G/N)' = G'N/N$.

b) Zeigen Sie, dass G genau dann auflösbar ist, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $G^{(k)} = \{e\}$.

c) Sei H ein Normalteiler von G, so dass H und G/H auflösbar sind. Zeigen Sie, dass dann auch G auflösbar ist.

a) *Beachte, das in diesem Aufgabenteil eine Gleichheit und nicht nur eine Isomorphie zu zeigen ist.* Die Kommutatorgruppe $(G/N)'$ ist eine Untergruppe von G/N, also sind ihre Elemente Nebenklassen der Untergruppe N in G. Da $G'\,N = N\,G'$ gilt (sogar beide Untergruppen G' und N sind Normalteiler), gehört die Menge $G'N$ zu einer Untergruppe von G, die insbesondere die Untergruppe N enthält. Es gilt $N \leq G'N \leq G$. Damit ist die Faktorgruppe $G'N/N$ sinnvoll definiert, und ihre Elemente sind ebenfalls Nebenklassen von N in $G'N \leq G$. In beiden Gruppen $(G/N)'$ und $G'N/N$ ist die Verknüpfung durch die Verknüpfung in G induziert, d.h. wir brauchen lediglich zu prüfen, ob die Mengen der Nebenklassen übereinstimmen. Die Nebenklassen in $(G/N)'$ sind von der Form

$$[a_1N, b_1N] \cdots [a_rN, b_rN] = ([a_1, b_1] \cdots [a_r, b_r])N \ ,$$

wobei $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ den Kommutator bezeichnet. Die Nebenklassen in $G'N/N$ sind von der Form

$$([a_1, b_1] \cdots [a_r, b_r])n\,N = ([a_1, b_1] \cdots [a_r, b_r])N \ .$$

Die Gruppen verwenden also dieselben Nebenklassen als Elemente.

b) [$\Rightarrow$] Sei G auflösbar. Dann gibt es eine Kette von Untergruppen

$$\{e\} = N_0 < N_1 < \ldots < N_l = G \ ,$$

wobei N_{i-1} ein Normalteiler von N_i (nicht unbedingt von G!!!) ist und die Faktorgruppen N_i/N_{i-1} abelsch sind. Nach der früheren Übungsaufgabe über die Kommutatorgruppe gilt dann $(N_i)' \leq N_{i-1}$. Also gilt

$$G' \leq N_{l-1} \quad , \quad (N_{l-1})' \leq N_{l-2} \quad , \ \ldots \ , \quad (N_1)' \leq \{e\} \ .$$

Da allgemein aus $H \leq K$ auch $H' \leq K'$ folgt (Beweis?), erhält man

$$G^{(2)} \leq (N_{l-1})' \leq N_{l-2} \quad , \quad G^{(3)} \leq N_{l-3} \quad , \quad \ldots \ , \quad G^{(l)} \leq \{e\} \ .$$

[$\Leftarrow$] Sei $G^{(k)} = \{e\}$. Die Untergruppenkette

$$\{e\} = G^{(k)} \leq G^{k-1} \leq \ldots \leq G$$

genügt der Definition von auflösbar: $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ ist Normalteiler in $G^{(i-1)}$ und die Faktorgruppe $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ ist abelsch (vgl. frühere Übungsaufgabe über Kommutatorgruppe).

c) Seien G/H und H auflösbar. Nach Aufgabenteil b) gibt es dann $k, l \in \mathbb{N}$ mit $(G/H)^{(k)} = \{H\}$ (Beachte, H ist das neutrale Element in G/H) und $H^{(l)} = \{e\}$. Induktiv liefert Aufgabenteil a) dann $(G/H)^{(k)} = (G^{(k)}H)/H$, also $G^{(k)} \leq H$. Es folgt $G^{(k+l)} = \{e\}$.