

## Lösungsskizze zu Aufgabe 28:

Gegeben sind die Gleichungen

$$F_1 : f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$$

$$F_2 : f(a, b) = f(b, a)$$

$$F_3 : f(x, x) = a$$

$$F_4 : f(b, a) = b$$

Das zugehörige Termersetzungssystem ist noethersch, da die Länge von Termen verkleinert wird bzw. wenn sie nicht verkleinert wird, die Länge gleich bleibt und ein  $f$  oder ein  $a$  nach rechts wandert.

Wende die Knuth-Bendix-Vervollständigung an:

$[F_1, F_1]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(f(u, v), f(w, z)), f(f(u, f(v, w)), z))$ . Es gilt  $f(f(u, v), f(w, z)) \xrightarrow{F_1} f(u, f(v, f(w, z)))$  und  $f(f(u, f(v, w)), z) \xrightarrow{F_1} f(u, f(f(v, w), z)) \xrightarrow{F_1} f(u, f(v, f(w, z)))$ , somit ist das kritische Paar harmlos.

$[F_1, F_2]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(a, f(b, z)), f(f(b, a), z))$ . Es ist  $f(f(b, a), z) \xrightarrow{F_4} f(b, z)$ . Füge die neue Gleichung

$$F_5 : f(a, f(b, z)) = f(b, z)$$

hinzu (TES mit der Argumentation von oben nach wie vor noethersch).

$[F_1, F_3]$ : Erhalte zwei kritische Paare,  $(f(x, f(x, z)), f(a, z))$  und  $(f(x, f(y, f(x, y))), a)$ , und zwei neue Gleichungen,

$$F_6 : f(x, f(x, z)) = f(a, z)$$

$$F_7 : f(x, f(y, f(x, y))) = a$$

$[F_1, F_4]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(b, f(a, z)), f(b, z))$ . Neue Gleichung:

$$F_8 : f(b, f(a, z)) = f(b, z)$$

Von den ursprünglichen Gleichungen bekommt man keine kritischen Paare mehr. Betrachte die neu hinzugekommenen:

$[F_1, F_5]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(a, f(f(b, u), z)), f(f(b, u), z))$ . Es ist  $f(a, f(f(b, u), z)) \xrightarrow{F_1} f(a, f(b, f(u, z))) \xrightarrow{F_5} f(b, f(u, z))$  und  $f(f(b, u), z) \xrightarrow{F_1} f(b, f(u, z))$ , somit ist das kritische Paar harmlos.

$[F_1, F_6]$ : Erhalte zwei kritische Paare,  $(f(x, f(f(x, u), z)), f(f(a, u), z))$  und  $(f(x, f(y, f(f(x, y), v))), f(a, v))$ . Es ist  $f(x, f(f(x, u), z)) \xrightarrow{F_1} f(x, f(x, f(u, z))) \xrightarrow{F_6} f(a, f(u, z))$  und  $f(f(a, u), z) \xrightarrow{F_1} f(a, f(u, z))$ , somit ist das erste kritische Paar harmlos.

Es ist  $f(x, f(y, f(f(x, y), v))) \xrightarrow{F_1} f(x, f(y, f(x, f(y, v))))$ . Neue Gleichung:

$$F_9 : f(x, f(y, f(x, f(y, v)))) = f(a, v)$$

$[F_1, F_7]$ : Erhalte zwei kritische Paare,  $(f(x, f(y, f(v, f(f(x, y), v))))$ ,  $a)$  und  $(f(u, f(f(v, f(u, v)), z)), f(a, z))$ . Es ist

$f(x, f(y, f(v, f(f(x, y), v)))) \xrightarrow{F_1} f(x, f(y, f(v, f(x, f(y, v))))$ , erhalte

$$F_{10} : f(x, f(y, f(v, f(x, f(y, v)))) = a$$

Es ist  $f(u, f(f(v, f(u, v)), z)) \xrightarrow{F_9} f(a, z)$ , somit ist das zweite kritische Paar harmlos.

$[F_1, F_8]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(b, f(f(a, u), z)), f(f(b, u), z))$ . Es ist  $f(b, f(f(a, u), z)) \xrightarrow{F_1} f(b, f(a, f(u, z))) \xrightarrow{F_7} f(b, f(u, z))$  und  $f(f(b, u), z) \xrightarrow{F_1} f(b, f(u, z))$ , somit ist das kritische Paar harmlos.

$[F_5, F_3]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(b, b), f(a, a))$ . Es ist  $f(b, b) \xrightarrow{F_3} a$  und  $f(a, a) \xrightarrow{F_3} a$ , somit ist das kritische Paar harmlos.

$[F_5, F_4]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(b, a), f(a, b))$ . Es ist  $f(b, a) \xrightarrow{F_4} b$  und  $f(a, b) \xrightarrow{F_2} f(b, a) \xrightarrow{F_4} b$ , somit ist das kritische Paar harmlos.

$[F_5, F_6]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(b, f(b, z)), f(a, f(a, z)))$ . Es ist  $f(b, f(b, z)) \xrightarrow{F_6} f(a, z)$  und  $f(a, f(a, z)) \xrightarrow{F_6} f(a, z)$ , somit ist das kritische Paar harmlos.

$[F_5, F_7]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(b, f(y, f(b, y))), f(a, a))$ . Es ist  $f(b, f(y, f(b, y))) \xrightarrow{F_7} a$  und  $f(a, a) \xrightarrow{F_3} a$ , somit ist das kritische Paar harmlos.

$[F_5, F_8]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(b, f(a, z)), f(a, f(b, z)))$ . Es ist  $f(b, f(a, z)) \xrightarrow{F_7} f(b, z)$  und  $f(a, f(b, z)) \xrightarrow{F_5} f(b, z)$ , somit ist das kritische Paar harmlos.

$[F_6, F_1]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(a, w), f(f(u, v), f(u, f(v, w))))$ . Es ist  $f(f(u, v), f(u, f(v, w))) \xrightarrow{F_1} f(u, f(v, f(u, f(v, w))))$ , neue Gleichung:

$$F_{11} : f(u, f(v, f(u, f(v, w)))) = f(a, w)$$

$[F_6, F_2]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(a, b), f(a, f(b, a)))$ . Es ist  $f(a, f(b, a)) \xrightarrow{F_4} f(a, b)$ , somit ist das kritische Paar harmlos.

$[F_6, F_3]$ : Erhalte das kritische Paar  $(f(a, x), f(x, a))$ . Beide Terme sind irreduzibel. Fügt man aber die Gleichung  $f(a, x) = f(x, a)$  hinzu, so würde man  $f(a, a)$  unendlich oft durch  $f(a, a)$  ersetzen, das Termersetzungssystem ist nicht mehr noethersch. Dies impliziert, dass eine Vervollständigung nicht möglich ist.

Für diejenigen, die finden, dass  $f(a, a)$  durch  $f(a, a)$  zu ersetzen ja kein echter Ersetzungsschritt ist: Man kann aus den Gleichungen auch die Gleichung

$$f(u, f(v, f(w, a))) = f(v, f(u, f(w, a)))$$

folgern. Diese liefert offenbar ein nicht-noethersches Termersetzungssystem.