# Lösungsvorschläge für Blatt 9

**Aufgabe 27:**

a) Sei zunächst $\mathrm{char} K \notin \{2,3\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} & y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(y + \frac{a_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_3}{2}\right)^2 + a_1x\left(y + \frac{a_3}{2}\right) - \frac{a_1a_3}{2}x = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \end{aligned}$$

Mit $\tilde{y} = y + \frac{a_3}{2}$, $\tilde{a}_4 = a_4 + \frac{a_1a_3}{2}$, $\tilde{a}_6 = a_6 + \left(\frac{a_3}{2}\right)^2$ wird die Gleichung zu

$$\begin{aligned} & \tilde{y}^2 + a_1x\tilde{y} = x^3 + a_2x^2 + \tilde{a}_4x + \tilde{a}_6 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\tilde{y} + \frac{a_1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2}x\right)^2 = x^3 + a_2x^2 + \tilde{a}_4x + \tilde{a}_6 \end{aligned}$$

Mit $\hat{y} = \tilde{y} + \frac{a_1}{2}x$, $\tilde{a}_2 = a_2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2$ erhält man

$$\hat{y}^2 = \left(x + \frac{\tilde{a}_2}{3}\right)^3 + \left(\tilde{a}_4 - \frac{1}{3}\tilde{a}_2^2\right)\left(x + \frac{\tilde{a}_2}{3}\right) + \left(\tilde{a}_6 - \left(\tilde{a}_4 - \frac{1}{3}\tilde{a}_2^2\right)\frac{\tilde{a}_2}{3} - \frac{1}{27}\tilde{a}_2^3\right)$$

Mit $\hat{x} = x + \frac{\tilde{a}_2}{3}$, $a = \ldots$, $b = \ldots$ erhält man

$$\hat{y}^2 = \hat{x}^3 + a\hat{x} + b$$

b) Sei nun $\mathrm{char} K = 3$. Wie oben erhält man nach geeigneter Substitution

$$\hat{y}^2 = x^3 + ax^2 + \tilde{c}x + \tilde{b}$$

Ist $a = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sonst gilt

$$\hat{y}^2 = x^3 + a\left(x + \frac{\tilde{c}}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{c}}{2a}\right)^2 + \tilde{b} = \hat{x}^3 + a\hat{x}^2 + b$$

mit $\hat{x} = x + \frac{\tilde{c}}{2a}$, $b = \ldots$.

c) Sei nun $\mathrm{char} K = 2$ und sei zunächst $a_1 \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 + a_1\left(x + \frac{a_3}{a_1}\right)y = \left(x + \frac{a_3}{a_1}\right)^3 + \tilde{a}_2\left(x + \frac{a_3}{a_1}\right) + \tilde{a}_4\left(x + \frac{a_3}{a_1}\right) + \tilde{a}_6 \end{aligned}$$

Mit $\hat{x} = x + \frac{a_3}{a_1}$ erhält man

$$\begin{aligned} & y^2 + a_1\hat{x}y = \hat{x}^3 + \tilde{a}_2\hat{x}^2 + \tilde{a}_4\hat{x} + \tilde{a}_6 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(y + \frac{\tilde{a}_4}{a_1}\right)^2 + a_1\hat{x}\left(y + \frac{\tilde{a}_4}{a_1}\right) = \hat{x}^3 + \tilde{a}_2\hat{x}^2 + \tilde{a}_4\hat{x} + a_6' \\ \Leftrightarrow \quad & \hat{y}^2 + a_1\hat{x}\hat{y} = \hat{x}^3 + d\hat{x}^2 + e \end{aligned}$$

mit $\hat{y} = y + \frac{\tilde{a}_4}{a_1}$, $d = \ldots$, $e = \ldots$.

Ist $a_1 = 0$, so gilt

$$y^2 + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 = (x + a_2)^3 + b(x + a_2) + c$$

**Aufgabe 28:**
Zu addieren seien die Punkte $P_1, P_2, P_3$, diese seien als paarweise verschieden und $\neq \mathcal{O}$ angenommen. Der Fall, dass zwei dieser Punkte gleich sind, geht analog. Bei der Konstruktion von $(P_1 + P_2) + P_3$ zeichnet man zunächst die Gerade $G_1$ durch $P_1$ und $P_2$, der dritte Schnittpunkt ist $-(P_1 + P_2)$. Sodann zeichnet man die Gerade $G_2$ durch $-(P_1 + P_2)$, die senkrecht zur $x$-Achse ist, diese hat die weiteren Schnittpunkte $P_1 + P_2$ und $\mathcal{O}$ mit der Kurve. Sodann zeichnet man die Gerade $G_3$ durch $P_1 + P_2$ und $P_3$ und erhält als dritten Schnittpunkt $-((P_1 + P_2) + P_3)$.

Bei der Konstruktion von $P_1 + (P_2 + P_3)$ zeichnet man zunächst die Gerade $H_1$ durch $P_2$ und $P_3$, der dritte Schnittpunkt ist $-(P_2 + P_3)$. Sodann zeichnet man die Gerade $H_2$ durch $-(P_2 + P_3)$, die senkrecht zur $x$-Achse ist, diese hat die weiteren Schnittpunkte $P_2 + P_3$ und $\mathcal{O}$ mit der Kurve. Sodann zeichnet man die Gerade $H_3$ durch $P_2 + P_3$ und $P_1$ und erhält als dritten Schnittpunkt $-(P_1 + (P_2 + P_3))$.

Die Geraden $G_1, G_3, H_2$ und die Geraden $G_2, H_1, H_3$ haben jeweils die Punkte $P_1, P_2, P_3, -(P_1 + P_2), P_1 + P_2, -(P_2 + P_3), P_2 + P_3, \mathcal{O}$ als Schnittpunkte mit der Kurve und als weiteren Schnittpunkt $-((P_1 + P_2) + P_3)$ bzw. $-(P_1 + (P_2 + P_3))$. Somit folgt die Behauptung aus dem angegebenen Satz.