

## Logik / Logik für Informatiker Übungsblatt 9

### Aufgabe 24: Ein Ring, sie zu knechten, sie alle zu finden, ins Dunkel zu treiben und ewig zu binden

Ein kommutativer Ring ist definiert als Menge  $R$  zusammen mit zwei Verknüpfungen „+“ und „·“, die den folgenden Axiomen genügen:

1.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  für alle  $x, y, z \in R$ .
2.  $x + y = y + x$  für alle  $x, y \in R$ .
3. Es gibt ein Element  $e \in R$  mit  $e + x = x$  für alle  $x \in R$ .
4. Es gibt eine Abbildung  $i : R \rightarrow R$  mit  $i(x) + x = e$  für alle  $x \in R$ .
5.  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  für alle  $x, y, z \in R$ .
6.  $x \cdot y = y \cdot x$  für alle  $x, y \in R$ .
7.  $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$  für alle  $x, y, z \in R$ .

Man formuliere dies als Menge gleichungslogischer Formeln.

### Aufgabe 25:

Gegeben sei die Gleichungsmenge  $M = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$  mit

$$F_1 : f(g(x, a)) = h(g(a, x))$$

$$F_2 : h(g(a, x)) = f(x)$$

$$F_3 : g(g(a, x), a) = h(g(a, f(x)))$$

$$F_4 : f(f(x)) = h(x)$$

$$F_5 : f(g(a, r(x))) = a$$

Bestimmen Sie bezüglich des zugehörigen Termersetzungssystems alle Normalformen von  $f(g(g(a, r(x)), a))$ .

### Aufgabe 26: Von stark übergewichtigen Männern und ihren rotnasigen Nutztieren

Beim Rentiergespann des Weihnachtsmannes verhält es sich so, dass die Rentiere in Paaren vor den Schlitten gespannt sind. Dabei gilt, dass die Väter zweier Rentiere, die ein Paar bilden, wiederum ein Paar bilden. (D. h. der Partner des Vaters ist der Vater des Partners. An dieser Stelle sei erwähnt, dass fliegende Rentiere ewig leben, was angesichts des beträchtlichen Alters des rotnasigen Rudolph nicht verwundern sollte.)

- a) Formulieren Sie diese Situation mit Hilfe von gleichungslogischen Formeln (Hinweis: Man drücke aus, dass der Partner des Partners eines Rentiers das Rentier selbst ist).
- b) Zeigen Sie mittels Termersetzung, dass der Partner des Vaters des Partners eines Rentiers der Vater dieses Rentiers ist.

Frohes Fest und ein gutes Jahr 2006!!!