Prof. Dr. M. Kreuzer — Abgabe: 31.10.2005, 16h

Algorithmische Invariantentheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Beweisen Sie, dass es für jede endliche Gruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ nicht konstante polynomiale Invarianten gibt. Geben Sie ein Beispiel einer unendlichen Gruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ an, bei der sich $P^G = K$ ergibt.

Aufgabe 2:

Gegeben seien drei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ und $P_3 = (x_3, y_3)$ in der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$.

a) Finden Sie eine euklidische Invariante $f \in K[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]^G$ deren Verschwinden damit äquivalent ist, dass die drei Punkte P_1, P_2, P_3 kollinear sind. Stellen Sie f als Polynom in den fundamentalen Invarianten dar.

b) Rechnen Sie nach, dass das Polynom $g = {x_1}^2 + {y_1}^2 - x_1x_2 - y_1y_2 - x_1x_3 - y_1y_3 + x_2x_3 + y_2y_3$ eine euklidische Invariante darstellt und drücken Sie es als Polynom in den fundamentalen Invarianten d_{12}, d_{13}, d_{23} aus.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein Körper K und eine $n \times n$–Matrix $X = (x_{ij})$ von Unbestimmten. Die Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(K)$ operiert auf $V = \bigoplus_{i,j=1}^{n} K \cdot x_{ij}$ durch Konjugation:

$$(x_{ij}) \mapsto A \cdot (x_{ij}) \cdot A^{-1} \qquad \text{für } A \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Diese Operation werde auf $P = K[x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ fortgesetzt. Finden Sie möglichst viele Invarianten dieser Operation. Können Sie eine Menge fundamentaler Invarianten bestimmen?

Aufgabe 4:

Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `IsGroup` (L) die als Eingabe eine Liste von Matrizen erwartet und nachprüft, ob diese Liste eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ darstellt. Hierbei sei n die Zahl der Unbestimmten des aktuellen Gruppenrings und K der aktuelle Koeffizientenkörper. Wenden Sie Ihre Funktion auf die Beispiele in der Datei `GroupExample.coc` an und zeigen Sie, dass zehn Gruppen vorliegen.

Aufgabe 5:

Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `IsInvariant` (F, L) die nachprüft ob ein gegebenes Polynom F invariant ist unter der durch die Liste L definierten Gruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ und die den entsprechenden Boolschen Wert ausgibt. Wenden Sie Ihre Funktion auf die folgenden Beispiele an:

a) $G = C_2,\ f = {x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2$

b) $G = C_4,\ f = {x_1}^3x_2 + 2{x_1}^2{x_2}^2 - x_1{x_2}^3$

c) $G = W_{24},\ f = ({x_1}^2 - {x_2}^2)({x_1}^2 - {x_3}^2)({x_2}^2 - {x_3}^2)$

d) $G = W_{24},\ f = x_1x_2x_3({x_1}^2 - {x_2}^2)({x_1}^2 - {x_3}^2)({x_2}^2 - {x_3}^2)$