

Algorithmische Invariantentheorie Übungsblatt 2

Aufgabe 6:

Finden Sie eine Formel für die Koeffizienten der Hilbert-Reihe des Rings $\mathbb{Q}[s_1, \dots, s_n] \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ der symmetrischen Polynome.

Aufgabe 7:

Sei $K = \mathbb{Q}$ und $G \subseteq \text{GL}_n(K)$ eine Gruppe, die durch eine Liste L von Matrizen repräsentiert werde.

- a) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `Molien(L)`, die die Hilbert-Reihe von $K[x_1, \dots, x_n]^G$ mittels Moliens Formel berechnet.
- b) Bestimmen Sie die Hilbert-Reihen von Beispiel 3.14 (mit $G = S_n$, $n \leq 10$), Beispiel 4.3 (mit $G = C_4$), Beispiel 4.5 (mit $G = V_4$) und Beispiel 4.6 (mit $G = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(4)$) mit Hilfe Ihrer Funktion `Molien(L)`.

Aufgabe 8:

Die Symmetriegruppe D_4 des Einheitsquadrates im \mathbb{R}^2 operiert auf $\mathbb{R}[x, y]$ durch Koordinatentransformation. Verwenden sie Moliens Formel und die Lineare-Algebra-Methode, um den Invariantenring $\mathbb{R}[x, y]^{D_4}$ zu bestimmen.

Aufgabe 9:

Schreiben Sie ein CoCoA-Programm `LinAlgMethod(L, N)` das für eine durch eine Liste L repräsentierte Gruppe $G = \text{GL}_n(\mathbb{Q})$ und eine natürliche Zahl N eine \mathbb{Q} -Basis der homogenen Invarianten $(P^G)_N$ vom Grad N berechnet, wobei $P = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ gelte. Verwenden Sie Ihr Programm `LinAlgMethod(L, N)` um die Beispiele 4.5 und 4.6 der Vorlesung sowie Ihr Ergebnis von Aufgabe 8 zu verifizieren.

Aufgabe 10:

Kombinieren Sie Ihre bisherigen Resultate und Programme, um den Invariantenring der folgenden Operation der Gruppe S_4 auf $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$ zu bestimmen. Die Permutation $\sigma_1 = (1\ 2\ 3\ 4)$ operiere durch die Permutation $(x_1\ x_4\ x_6\ x_3)(x_2\ x_5)$ der Variablen und $\sigma_2 = (1\ 2)$ operiere durch $(x_2\ x_4)(x_3\ x_5)$.

Aufgabe 11:

Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `SubAlghF(F)`, die ausgehend von einer Liste homogener Polynome $F = [f_1, \dots, f_s]$ die Hilbert-Reihe der erzeugten K -Unteralgebra $K[f_1, \dots, f_s]$ von $K[x_1, \dots, x_n]$ berechnet. Testen Sie Ihre Funktion an den Beispielen der Vorlesung bzw. der vorangegangenen Übungsaufgaben.