Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabe: 28.11.2005, 16h

Algorithmische Invariantentheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 12:

Sei K ein Körper und $G = \mathrm{GL}_n(K)$ eine Gruppe, die auf einem K–Unterraum $V = Kx_1 \oplus \ldots \oplus Kx_n$ linear operiert. Die Gruppe G sei endlich und es gelte $\mathrm{char}(K) \nmid \#G$.

a) Formulieren Sie einen Hilbert–gesteuerten Algorithmus zur Berechnung der fundamentalen Invarianten dieser Operation, der den Reynolds–Operator verwendet.

b) Schreiben Sie CoCoA–Funktionen `Reynolds` (F, L) und `HDInvariants` (L), die diesen Algorithmus implementieren. Dabei sei L die Liste der Matrizen in G.

c) Wenden Sie Ihre Funktion `HDInvariants` (L) in den Beispielen aus der Datei `GroupExample.coc` an.

Aufgabe 13:

Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Die alternierende Gruppe A_n operiere auf $V = Kx_1 \oplus \ldots \oplus Kx_n$ durch Permutation der Basisvektoren $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

a) Zeigen Sie, dass die elementarsymmetrischen Funktionen $s_1, \ldots, s_n$ ein System primärer Invarianten für A_n bilden.

b) Beweisen Sie, dass die Menge $\{1, g\}$ mit $g = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$ ein System sekundärer Invarianten darstellt.

c) Zeigen Sie, dass $P^{A_n} = P^{S_n} \oplus P^{S_n} \cdot g$ gilt.

Aufgabe 14:

Sei $K = \mathbb{Q}$ und $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ eine endliche Gruppe, die auf $V = Kx_1 \oplus \ldots \oplus Kx_n$ linear operiert. Ferner sei eine Liste fundamentaler Invarianten $F = [f_1, \ldots, f_s]$ gegeben.

a) Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `ReprInvariant` (G, F), die eine gegebene Invariante G als Polynom in den fundamentalen Invarianten aus F ausdrückt.

b) Wenden Sie Ihre Funktion `ReprInvariant` (G, F) an, um die Polynome $g_1 = {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3$ und $g_1 = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$ als Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen auszudrücken.

Aufgabe 15:

Im Polynomring $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper K sei s_i das i–te elementarsymmetrische Polynom und $p_i = {x_1}^i + \ldots + {x_n}^i$. Beweisen Sie die Formel

$$s_i = \frac{1}{i!} \det \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{k-1} & p_{k-2} & \cdots & p_1 & k-1 \\ p_k & p_{k-1} & \cdots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}$$