Algorithmische Invariantentheorie
Übungsblatt 4

Aufgabe 16:

Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Gruppe, die aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} t^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t^{a_n} \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besteht.

a) Zeigen Sie, dass der Invariantenring $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ endlich erzeugt ist.

b) Bestimmen sie den Invariantenring $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ im Fall $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-2, -2, 1, 3)$.

Aufgabe 17:

Die symmetrische Gruppe S_4 operiere auf der 6–elementigen Menge

$$M = \{\{y_1, y_2\}, \{y_1, y_3\}, \{y_1, y_4\}, \{y_2, y_3\}, \{y_2, y_4\}, \{y_3, y_4\}\}$$

durch Permutation der Indizes. Sei $G \subseteq \mathrm{GL}_6(\mathbb{Q})$ die zugehörige Gruppe von Permutationsmatrizen. Mit anderen Worten, die Gruppe $G \cong S_4$ permutiere die Variablen gemäß den Entsprechungen $x_1 \mathrel{\hat{=}} \{y_1, y_2\}, \ldots, x_6 \mathrel{\hat{=}} \{y_3, y_4\}$.

a) Finden Sie die zu zwei Erzeugern von S_4 gehörigen Permutationsmatrizen.

b) Berechnen Sie (von Hand oder mit CoCoA) den Invariantenring dieser Operation.

c) Vergleichen Sie die Grade der gefundenen Invarianten mit Noethers Gradschranke.

Aufgabe 18:

Sei G eine endliche Gruppe und sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \nmid \gamma$ für $\gamma = \#G$. Die Gruppe G operiere linear auf $V = Kx_1 \oplus \ldots \oplus Kx_n$. Beweisen Sie, dass jedes homogene Polynom vom Grad γ im Hilbert–Ideal dieser Operation liegt.

Aufgabe 19:

Die zweielementige Gruppe

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2)$$

operiere linear auf $P = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_4]$.

a) Zeigen Sie $P^G = \mathbb{F}_2[x_1, x_3, x_1x_2 + {x_2}^2, x_3x_4 + {x_4}^2]$.

b) Folgern Sie, dass nicht jedes Polynom vom Grad 2 im Hilbert–Ideal dieser Operation liegt.

Aufgabe 20:

Beweisen Sie die folgende Formel für die Hilbert–Reihe des Invariantenrings P^G einer endlichen Gruppe G im nicht modularen Fall:

$$HS_{P^G}(z) = \frac{1}{\#G} \cdot \sum_{\sigma \in G} \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \operatorname{Spur}\left(\sigma^i\right) z^i \right).$$