Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabe: 02.01.2006, 16h

Algorithmische Invariantentheorie
Übungsblatt 5

Aufgabe 21:

Sei K ein Körper, sei R eine endlich erzeugte positiv graduierte K–Algebra mit $\dim(R) = n$, und sei $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq R$ eine Menge homogener algebraisch unabhängiger Elemente, so dass R ein freier $K[f_1, \ldots, f_n]$–Modul ist. Zeigen Sie, dass $\{f_1, \ldots, f_n\}$ dann eine reguläre Folge in R darstellt.

Tipp: Zeigen sie, dass der Syzygienmodul

$$\mathrm{Syz}(f_1, \ldots, f_n) = \{(g_1, \ldots, g_n) \in R^n \mid f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 0\}$$

von den Koszul–Syzygien $(0, \ldots, 0, -f_j, 0, \ldots, 0, f_i, 0, \ldots, 0)$ erzeugt wird.

Aufgabe 22:

In der Situation von Aufgabe 21 sei $(f_1, \ldots, f_n)$ eine homogene reguläre Folge in R. Beweisen Sie, dass für jede Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ auch $(\pi(f_1), \ldots, \pi(f_n))$ eine reguläre Folge darstellt.

Aufgabe 23:

Im Beispiel 12.9 der Vorlesung, bestimmen Sie die Hironaka–Zerlegungen der sechs Invarianten ${g_2}^2, g_2 g_3, g_2 g_4, {g_3}^2, g_3 g_4$ und ${g_4}^2$. Folgern Sie einen Algorithmus zur Berechnung der Hironaka–Zerlegung einer beliebigen Invariante in $K[f_1, f_2, f_3, g_2, g_3, g_4]$.

Aufgabe 24:

Die Gruppe $G \cong \mathbb{Z}/(210)$ operiere auf $V = \mathbb{Q}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}x_{17}$ durch Permutation der Basisvektoren, wobei die Permutation $\sigma = \langle 1, 2\rangle \langle 3, 4, 5\rangle \langle 6, 7, 8, 9, 10\rangle \langle 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\rangle$ dem Erzeuger der zyklischen Gruppe G entspreche.

a) Finden Sie eine Invariante $f \in P^G$, die unter keiner Permutationsgruppe H mit $G \subsetneq H \subseteq S_{17}$ invariant ist.

b) Berechnen Sie die Hilbert–Reihe von P^G.

c) Finden Sie ein System primärer Invarianten mit minimalem Gradtupel.

d) Zeigen Sie, dass es ein System sekundärer Invarianten gibt, die alle einen Grad ≤ 45 besitzen. Ist diese Schranke scharf? Wie viele sekundäre Invarianten gibt es?

Aufgabe 25:

Eine endliche Matrix–Gruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ über einen Körper K der Charakteristik 0 operiere linear auf $V = Kx_1 \oplus \ldots \oplus Kx_n$. Eine Matrix $A \in G$ heißt Pseudospiegelung, wenn sie den Eigenwert $\lambda = 1$ genau mit Multiplizität $n - 1$ besitzt. Zeigen Sie, dass die Hilbert–Reihe von P^G die Laurent–Entwicklung

$$HS_{P^G}(z) = \frac{1/\#G}{(1-z)^n} + \frac{s(G)/2\#G}{(1-z)^{n-1}} + \ldots$$

besitzt, wobei $s(G)$ die Zahl der Pseudospiegelungen in G bezeichne.