Prof. Dr. M. Kreuzer | Abgabe: 23.01.2006, 16h

Algorithmische Invariantentheorie
Übungsblatt 6

Aufgabe 26:

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $S = K[x, xy - y^2, xy^2] \subseteq K[x, y]$. Zeigen Sie:

a) Ist σ eine Termordnung mit $x >_\sigma y$, so besitzt S keine endliche σ–SAGBI–Basis.

b) Ist σ eine Termordnung mit $y >_\sigma x$, so besitzt S eine endliche σ–SAGBI–Basis.

Aufgabe 27:

Sei K ein Körper, sei S eine K–Unteralgebra von $P = K[x_1, \ldots, x_n]$, sei σ eine Termordnung auf $\mathbb{T}^n$ und sei Ψ die von der σ–Gröbner–Filtrierung induzierte Filtrierung auf S. Beweisen Sie, dass genau dann $\mathrm{gr}_\Psi(S) = P$ gilt, wenn $S = P$ erfüllt ist.

Aufgabe 28:

Sei K ein Körper und $S = K[{x_1}^2, x_1x_2, {x_2}^2] \subseteq K[x_1, x_2]$. Finden Sie ein Erzeugendensystem des S–Moduls

$$\mathrm{Syz}_S\left(x_1x_2, {x_2}^2\right) = \left\{(f_1, f_2) \in S^2 \mid f_1x_1x_2 + f_2{x_2}^2 = 0\right\}.$$

Aufgabe 29:

Sei K ein Körper, sei $P = K[x]$ und sei $S \subseteq P$ die Menge aller Polynome f mit $f(1) = f(-1)$.

a) Zeigen Sie, dass S eine K–Unteralgebra von P ist.

b) Bestimmen Sie eine Präsentation $S \cong K[y_1, y_2]/J$ mit einem homogenen Ideal $J \subseteq K[y_1, y_2]$.

c) Finden Sie eine deg–SAGBI–Basis von S.

Aufgabe 30 (Lustiges Zusammenkleben von Punkten):

Sei K ein Körper, $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ und $I \subseteq P$ ein Ideal.
Wir schreiben $K + I = \{c + f \mid c \in K,\ f \in I\}$.

a) Zeigen Sie, dass $K + I$ eine K–Unteralgebra von P ist.

b) Beweisen Sie, dass $K + I$ im Fall $I = (x_1) \subseteq K[x_1, x_2]$ keine endlich erzeugte K–Algebra ist.

c) Sei $\mathbb{X} = \{p_1, \ldots, p_s\} \subseteq K^n$ eine Punktmenge und $I = \{f \in P \mid f(p_1) = \ldots = f(p_s) = 0\}$ ihr Verschwindungsindeal. Zeigen Sie, dass $K + I$ eine endlich erzeugte K–Algebra ist.

   Tipp: Wählen Sie eine Termordnung σ und beweisen Sie, dass P als $(K + I)$–Modul von den Termen in $\mathbb{T}^n \setminus \mathrm{LT}_\sigma(I)$ erzeugt wird.

d) Zeigen Sie, dass die K–Unteralgebra $K + I \subseteq P$ in der Situation von c) für jede Termordnung σ eine endliche σ–SAGBI–Basis besitzt.

   Tipp: Betrachten Sie den Beweis von Lemma 2.6.5 in [KR1].

e) Berechnen Sie ein endliches K–Algebraerzeugendensystem von $K + I$, wenn $I \subseteq K[x_1, x_2]$ das Verschwindungsideal der Punktmenge $\mathbb{X} = \{(1, 0), (-1, 0)\}$ ist. Wie erklärt sich der Unterschied zwischen diesem Beispiel und dem aus Aufgabe 29?