2 Welche Probleme werden in der Invariantentheorie untersucht?

Sei K Körper, V endlich dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$, G Gruppe, die als Gruppe von K-Automorphismen von V auf V operiert (d.h. $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}_K(V)$), $P = K[V] = K[x_1, \ldots, x_n]$ Polynomring und $P^G = \{f \in P \mid \sigma(f) = f\}$ Invariantenring von G.

2.1 Bemerkung (Hilberts 14. Problem)

Gibt es stets eine endliche Menge von Invarianten $f_1, \ldots, f_s$, so dass $P^G = K[f_1, \ldots, f_s]$ gilt?

Beispiel: Die K-Unteralgebra $K\left[xy, xy^2, xy^3, \ldots\right]$ ist nicht endlich erzeugbar, denn $xy^i \notin K\left[xy, \ldots, xy^{i-1}\right]$.

a) Ist G endlich, so lautet die Antwort "ja" (Emmy Noether).

b) Ist G eine (lineare) reduktive Gruppe (z.B. $\mathrm{GL}_n(K)$, $\mathrm{SL}_n(K)$, $\mathcal{O}_n(K)$, alle halbeinfachen Gruppen, Torusgruppen, ...), so ist die Antwort "ja".

c) Im Allgemeinen lautet die Antwort "nein" (Nagata 1959).

Erstes fundamentales Problem

Finde eine endliche Menge **fundamentaler Invarianten** $\{f_1, \ldots, f_s\}$, d.h. ein K-Algebraerzeugendensystem von $P^G = K[f_1, \ldots, f_s]$ bzw. zeige, dass ein solches nicht existiert.

Zweites fundamentales Problem

Beschreibe die algebraische Relation zwischen den fundamentalen Invarianten $f_1, \ldots, f_s$.

2.2 Bemerkung

Seien $y_1, \ldots, y_s$ Unbestimmte. Betrachte den K-Algebrahomomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi : K[y_1, \ldots, y_s] &\rightarrow K[f_1, \ldots, f_s] = P^G \\ y_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

Dann ist $I(f_1, \ldots, f_s) = \ker(\Phi)$ das **Relationsideal** von $(f_1, \ldots, f_s)$. Das zweite fundamentale Problem verlangt also die Berechnung eines Erzeugendensystems von $I(f_1, \ldots, f_s)$.

Drittes fundamentales Problem

Gegeben sei eine weitere Invariante $g \in P^G = K[f_1, \ldots, f_s]$. Drücke g als Polynom in den Invarianten $f_1, \ldots, f_s$ aus.

Allgemeiner: Löse das explizite Zugehörigkeitsproblem für Ideale von P^G.

2.3 Beispiel

Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}y_1 \oplus \mathbb{R}x_2 \oplus \mathbb{R}y_2 \oplus \mathbb{R}x_3 \oplus \mathbb{R}y_3 \cong \mathbb{R}^6$ der Vektorraum der Punkttripel (p_1, p_2, p_3) mit $p_i \in \mathbb{R}^2$. Die Gruppe G der Kongruenzabbildungen von $\mathbb{R}^2$ operiert auf V wie in Beispiel 1.6. Für $P = \mathbb{R}[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]$ gilt:

$$P^G = \mathbb{R}[d_{12}, d_{13}, d_{23}] \quad \text{mit} \quad d_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

Herons Formel für den Flächeninhalt A des Dreiecks $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ lautet

$$A^2 = 16s(s - d_{12})(s - d_{13})(s - d_{23}) \quad \text{mit} \quad s = \frac{1}{2}(d_{12} + d_{13} + d_{23})$$

Da A invariant ist unter der Operation von G, muss es eine Darstellung $A^2 = f(d_{12}, d_{13}, d_{23})$ mit einem Polynom f geben. In der Tat gilt:

$$A^2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{pmatrix} \in P^G$$

Viertes fundamentales Problem

Gegeben sei eine geometrische Eigenschaft $\mathcal{P}$. Finde eine korrespondierende Invariante $f \in P^G$ deren Verschwinden äquivalent zur Gültigkeit von $\mathcal{P}$ ist.

[Gibt es einen Algorithmus zum Übergang Geometrie $\rightarrow$Algebra?]

2.4 Beispiel

In seinem "Erlangener Programm" hat Felix Klein 1872 eine Identifikation von Geometrie und Invariantentheorie gefordert: Eine Eigenschaft der Euklidischen Geometrie ist eine Eigenschaft, die unter der Gruppe der Konvergenzabbildungen invariant ist; eine Eigenschaft der projektiven Geometrie ist eine Eigenschaft, die unter der Gruppe der projektiven Trafos invariant ist, etc.

2.5 Beispiel (Vier Punkte auf einem Kreis)

In der Situation von Beispiel 1.6 (mit $n = 4$) gilt: Vier Punkte $p_1 = (x_1, y_2), \ldots, p_4 = (x_4, y_4)$ in $\mathbb{R}^2$ liegen genau dann auf einem Kreis, wenn es einen weiteren Punkt (x_0, y_0) gibt mit

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \quad = \quad (x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2 \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq 4$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn die Invariante

$$f = d_{12}^2 d_{34}^2 + d_{13}^2 d_{24}^2 + d_{14}^2 d_{23}^2 - 2d_{12}d_{13}d_{24}d_{34} - 2d_{12}d_{14}d_{23}d_{34} - 2d_{13}d_{14}d_{23}d_{24}$$

verschwindet. Wie findet man eine solche Beziehung?