Kapitel II: Elementare Eigenschaften von Invariantenringen

3 Wie viele Invarianten gibt es?

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und sei $(\Gamma, +)$ ein kommutatives Monoid.

3.1 Definition

Eine Γ-**Graduierung** auf R ist eine Zerlegung $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$ mit kommutativen Untergruppen R_γ von R, so dass gilt:

$$R_\gamma \cdot R_{\gamma'} \subseteq R_{\gamma+\gamma'} \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma$$

3.2 Beispiel

Sei K ein Körper und $P = K[x_1, \ldots, x_n]$. Die **Standardgraduierung** auf P ist die $\mathbb{N}$-Graduierung $P = \bigoplus_{i \geq 0} P_i$ mit

$$P_i = \langle x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = i \rangle_K$$

(homogenen Polynome vom Grad i)

3.3 Bemerkung

Sei K Körper, $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ standardgraduiert und sei $A \subseteq P$ eine K-Unteralgebra. Genau dann ist A eine graduierte K-Unteralgebra von P, wenn gilt

$$A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i \quad \text{mit} \quad A_i = A \cap P_i$$

3.4 Satz

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum auf dem eine Gruppe G linear operiert. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sei Basis von V. Dann ist der Invariantenring P^G eine graduierte K-Unteralgebra von P (bzgl. der Standardgraduierung). MaW: Ist $f \in P^G$ eine Invariante, so sind auch die homogenen Komponenten von f Invarianten (bzgl. der Standardgraduierung).

Beweis: Sei $\sigma \in G$ und sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Darstellungsmatrix von G. Ist $f \in P_i$ homogen vom Grad i, so gilt

$$\sigma(f) = f(A \cdot x) = f(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{1n}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n)$$

Dieses Polynom ist wiederum homogen vom Grad i, denn z.B. für $f = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ gilt $\sigma(f) = l_1^{\alpha_1} \ldots l_n^{\alpha_n}$ mit Linearformen $l_1, \ldots, l_n$. Für ein beliebiges Polynom $f = f_0 + \ldots + f_d \in P^G$ mit $f_i \in P_i$ gilt dann:

$$f = \sigma(f) = \underbrace{\sigma(f_0)}_{(1)} + \ldots + \underbrace{\sigma(f_d)}_{(2)}$$

wobei (1) homogen vom Grad 0 und (2) homogen vom Grad (d) ist. Dies ist die Zerlegung von f in homogene Komponenten von $\sigma(f)$. Wegen $f = \sigma(f)$ und der Eindeutigkeit der Zerlegung in homogene Komponenten folgt $\sigma(f_i) = f_i$ für $i = 1, \ldots, d$. $\square$

3.5 Bemerkung

Nicht jede graduierte K-Unteralgebra $A \subseteq P = K[x_1, \ldots, x_n]$ ist endlich erzeugt, z.B. ist

$$A = K\left[x, xy, xy^2, xy^3, \ldots\right] \subset P = K[x, y]$$

nicht endlich erzeugt.

3.6 Definition

Sei K ein Körper und $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte K-Algebra, d.h. für jedes $i \in \mathbb{Z}$ sei R_i ein K-Untervektorraum von R. Gilt $\dim_K(R_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, so heißt die Abbildung,

$$\begin{aligned} \mathrm{HF}_R : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ i &\mapsto \dim_K(R_i) \end{aligned}$$

die **Hilbert-Funktion** von R.

3.7 Satz

Der Polynomring $P = [x_1, \ldots, x_n]$ sei standardgraduiert. Für $i < 0$ setze $P_i = \{0\}$ und erhalte die $\mathbb{Z}$-Graduierung $P = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} P_i$. Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\mathrm{HF}_P(i) = \binom{n+i-1}{n-1}$$

Für einen Invariantenring $P^G \subseteq P$ folgt:

$$\mathrm{HF}_{P^G}(i) \leq \binom{n+i-1}{n-1}$$

Beweis: Wir schließen mit Induktion nach $n+i$. Für ein Monom $t = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ vom Grad i gibt es zwei Fälle:
a) $\alpha_n = 0$, also $t \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]_i$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\binom{n+i-2}{n-2}$ solche Monome.
2) $\alpha_n \neq 0$, also $t = x_n t'$ mit $t' \in K[x_1, \ldots, x_n]_{i-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\binom{n+i-2}{n-1}$ solche Monome t'.
Insgesamt folgt:

$$\mathrm{HF}_P(i) = \dim_K(P_i) = \binom{n+i-2}{n-2} + \binom{n+i-2}{n-1} = \binom{n+i-1}{n-1}$$

□

3.8 Beispiel

Für die Invarianten von $G = \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ gilt $P^G = \mathbb{R}\left[x_1^2 + x_2^2\right] \subseteq P = \mathbb{R}[x_1, x_2]$. Also folgt:

$$\mathrm{HF}_{P^G}(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \geq 0 \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3.9 Satz (Das Lemma von Nakayama)

Sei R eine endlich erzeugte $\mathbb{N}$-graduierte K-Algebra. Sei M eine endlich erzeugter graduierter R-Modul und sei $U \subseteq M$ ein graduierter Untermodul. Sei $R_+ = \bigoplus_{i>0} R_i$ und $R_0 = K$.

a) Genau dann gilt $U = M$, wenn $U + R_+M/R_+U = M/R_+M$ gilt.

b) Elemente $\{m_1, \ldots .m_s\} \subseteq M$ erzeugen M als R-Modul genau dann, wenn ihre Restklassen $\{\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_s\}$ den K-Vektorraum M/R_+M erzeugen.

Beweis:

Zu (a): "$\Rightarrow$": klar.

"$\Leftarrow$": Angenommen es gilt $U \not\subseteq M$. Sei $m \in M \backslash U$ ein homogenes Element von kleinstem Grad. Schreibe

$$m = u + \sum_{i=1}^{l} r_i m_i$$

mit $r_i \in R_+$ homogen, $m_i \in M$ homogen, $u \in U$ homogen und $\deg(m) = \deg(u) = \deg(r_i m_i)$. Es folgt:

$$\sum_{i=1}^{l} r_i m_i \in M \backslash U$$

Damit folgt: Es gilt $i \in \{1, \ldots, l\}$ mit $m_i \in M \backslash U$ und m_i homogen mit $\deg(m_i) < \deg(m)$. Wir erhalten einen Widerspruch zur Minimalität von $\deg(m)$. □

Zu (b): Dies folgt sofort aus (a) mit $U = \langle m_1, \ldots, m_s \rangle_R$.

3.10 Korollar

Ist R eine endlich erzeugte $\mathbb{N}$-graduierte K-Algebra, so besitzt R eine (endliche) Hilbert-Funktion, d.h. $\dim_K(R_i) < \infty$ für alle $i \geq 0$.

Beweis: Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ist $R_i = (R/R_+ \cdot R)_i$ endlich erzeugter K-Vektorraum. □

Frage

Wie sieht die Hilbertfunktion einer Algebra $K[f_1, \ldots, f_s]$ aus, wenn $\deg(f_i) > 0$ gilt?

3.11 Definition

Sei R eine $\mathbb{N}$-graduierte K-Algebra mit endlicher Hilberfunktion. Dann heißt die formale Potenzreihe

$$\mathrm{HS}_R(z) \quad = \quad \sum_{i \geq 0} \mathrm{HF}_R(i)\, z^i \in \mathbb{Z}[[z]]$$

die **Hilbert-Reihe** von R.

3.12 Korollar

Ist $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ standard-graduiert, so gilt

$$\mathrm{HS}_p(z) = \sum_{i \geq 0} \binom{n+i-1}{n-i} z^i = \frac{1}{(1-z)^n}$$

Beweis: Induktion nach n und Rechnen mit Binomialkoeffizienten. □

3.13 Satz

Sei K ein Körper und $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ sei $\mathbb{N}$-graduiert durch $\deg(x_i) = d_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt:

$$\mathrm{HS}_P(z) = \frac{1}{(1 - z^{d_1})(1 - z^{d_2}) \ldots (1 - z^{d_n})}$$

Beweis: Verwende Induktion nach n:

$n = 0$: $\mathrm{HS}_K(z) = 1$.

$n > 0$: Betrachte die homogene exakte Sequenz

$$0 \to P(-d_n) \xrightarrow{\mu_{x_n}} P \to \underbrace{P/(x_n)}_{\cong K[x_1,\ldots,x_{n-1}]} \to 0$$

Hierbei sei $P(-d_n)_i = P_{-d_n+i}$ für alle i. Es folgt

$$\mathrm{HS}_P(z) = \mathrm{HS}_{K[x_1,\ldots,x_n]} + z^{d_n}\,\mathrm{HS}_P(z)$$

und somit

$$\mathrm{HS}_P(z) = \mathrm{HS}_{K[x_1,\ldots,x_{n-1}]}(z)\,\frac{1}{(1 - z^{d_n})}$$

□

3.14 Beispiel

Sei K ein Körper und $V = \bigoplus_{i=1}^{n} Kx_i$. Die Gruppe S_n operiere auf V durch Permutation der Basis. Für den Invariantenring $P^G = K[s_1, \ldots, s_n]$ gilt $\deg(s_i) = i$, wobei $s_1, \ldots, s_n$ die elementarsymmetrischen Polynome sind. Damit folgt

$$\mathrm{HS}_{P^G}(Z) = \frac{1}{(1 - z)(1 - z^2) \ldots (1 - z^n)} = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 7z^5 + \ldots$$

3.15 Bemerkung

Betrachte einen Invariantenring $P^G = K[f_1, \ldots, f_s]$ und sei $\deg(f_i) = d_i > 0$. Bilde den surjektiven K-Algebra-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi : K[y_1, \ldots, y_n] &\mapsto K[f_1, \ldots, f_n] = P^G \\ y_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

mit unbestimmten y_i vom Grad d_i. Dann ist Φ homogen und $I = \ker(\Phi)$ homogenes Ideal und $P^G \cong K[y_1, \ldots, y_s]/I$. Für solche K-Algebren $R = K[y_1, \ldots, y_s]/I$ mit $\deg(y_i) = d_i > 0$ und I homogen ist HS_R von der Form

$$\mathrm{HS}_R(z) = \frac{\mathrm{HN}_R(z)}{(1 - z^{d_1})(1 - z^{d_2}) \ldots (1 - z^{d_n})}$$

mit einem Polynom $\mathrm{HN}_R(z) \in Z[z]$ mit $\mathrm{HN}_R(0) = 1$. Dieses Polynom heißt **Hilbert-Zähler** von R. (vgl. [KR2], §5.8).

Ist insbesondere ein Invariantenring $P^G = K[f_1, \ldots, f_s]$ gegeben, so kann

$$\mathrm{HS}_{P^G}(z) = \frac{\mathrm{HN}_{P^G}(z)}{(1 - z^{d_1})(1 - z^{d_2}) \ldots (1 - z^{d_n})}$$

effektiv berechnet werden.