4 Wie kann man die Hilbert-Reihe eines Invariantenrings berechnen?

Im folgenden sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ eine endliche Gruppe, die auf V bzgl. der Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ linear operiert.

Voraussetzungen

G sei endlich und es gelte $\mathrm{char}(K) \nmid \#G$. Diese Voraussetzung definiert den sogenannten **nicht-modularen Fall**.

4.1 Lemma

Für die Dimension des G-invarianten K-Untervektorraums $V^G = \{v \in V \mid \sigma(v) = v \;\forall \sigma \in G\}$ gilt:

$$\dim\left(V^G\right) = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \mathrm{Spur}(\sigma)$$

.

Beweis: Sei $\overline{\sigma} = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \sigma \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Für alle $\tau \in G$ und alle $v \in V$ gilt

$$\tau\overline{\sigma}(v) = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \tau\sigma(v) = \frac{1}{\#G} \sum_{\tilde{\sigma} \in G} \tilde{\sigma}(v) = \overline{\sigma}(v)$$

Also gilt: $\overline{\sigma} \in V^G$. Für $v \in V^G$ gilt $\overline{\sigma}(v) = v$, d.h. der Vektorraum V^G ist das Bild dieser Projektion.
Ferner folgt:

$$\overline{\sigma}^2(v) = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \sigma\underbrace{(\overline{\sigma}(v))}_{\in V^G} = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \overline{\sigma}(v) = \overline{\sigma}(v)$$

Somit ist $\overline{\sigma}$ eine Projektion auf V^G und aus $\overline{\sigma}^2 - \overline{\sigma} = 0$ folgt, dass 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von $\overline{\sigma}$ sind. Damit können wir das charakteristische Polynom $\chi_{\overline{\sigma}}$ darstellen in der Form $\chi_{\overline{\sigma}}(t) = t^\alpha (t-1)^\beta$ mit m$\alpha + \beta = n$. Hierbei gilt $\alpha = \dim_K(\ker(\overline{\sigma}))$ und dies liefert:

$$\beta = \dim_K(\mathrm{Bild}(\overline{\sigma})) = \dim_K\left(V^G\right)$$

Nun gilt:

$$\chi_{\overline{\sigma}}(t) = t^n - \mathrm{Spur}(\overline{\sigma})\, t^{n-1} \pm \ldots$$

und somit $\beta = \mathrm{Spur}(\overline{\sigma}) = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \mathrm{Spur}(\sigma)$. □

4.2 Theorem (Moliens Formel)

Sei G endlich und $\mathrm{char}(K) \nmid \#G$. Dann gilt

$$\mathrm{HS}_{P^G}(z) \quad = \quad \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\det(\mathcal{I}_n - zA_\sigma)}$$

Im Fall $\mathrm{char}(K) = 0$ ist gilt sei dabei $\mathcal{A}_\sigma$ die Darstellungsmatrix von σ bzgl. der Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 0$ wähle einen Isomorphismus zwischen der Gruppe der Einheitswurzeln in $\overline{K}$ und der Gruppe der Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$, also $\mu_\gamma\left(\overline{K}\right) \cong \mu_\gamma(\mathbb{C})$ mit $\gamma = \#G$. Dann sei $\mathcal{A}_\sigma$ die Diagonalmatrix über $\mathbb{C}$ mit den Bildern der Eigenwerte von σ auf der Hauptdiagonalen.

Beweis: Der Beweis erfolgt nur für den Fall, dass $\operatorname{char}(K) = 0$. Im Fall $\operatorname{char}(K) > 0$ verläuft er analog. Sei $\operatorname{char}(K) = 0$. Für $\sigma \in G$ und $d > 0$ sei $\sigma^{(d)} : P_d \to P_d$ die induzierte K-lineare Abbildung. Der invariante K-Untervektorraum aller Abbildungen $\sigma^{(d)}$ ist gerade $\left(P^G\right)_d$. Die Darstellungsmatrix von $\sigma^{(d)}$ ist eine $\binom{n+d-1}{n-1} \times \binom{n+d-1}{n-1}$-Matrix (vgl. Satz 3.7).

Wie wollen nun die Spur von $\sigma^{(d)}$ berechnen. Dazu erweitern wir den Grundkörper K zum algebraischen Abschluss $\overline{K}$. Da $\sigma \in G$ endliche Ordnung hat, d.h. da $\sigma^\gamma = 1$ gilt für $\gamma = \#G$, zerfällt $\chi_\sigma(t)$ in paarweise verschiedene Linearformen, denn $\mu_\sigma(t) \mid t^\gamma - 1$ und wegen $\operatorname{char}(K) \nmid \gamma$ ist $t^\gamma - 1$ separabel . Somit ist σ diagonalisierbar. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von σ und seien $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ die zugehörigen Eigenwerte. Es folgt: $\operatorname{Spur}(\sigma) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Die Vektoren $\{v_1^{\alpha_1} \dots v_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = d\}$ bilden eine K-Basis von P_d. Sie sind Eigenvektoren von $\sigma^{(d)}$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1^{\alpha_1}, \dots, \lambda_n^{\alpha_n}$. Also erhalten wir

$$\operatorname{Spur}\left(\sigma^{(d)}\right) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=d} \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\mathrm{HF}_{P^G}(d) = \dim_K \left(P^G\right)_d \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \operatorname{Spur}\left(\sigma^{(d)}\right) = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=d} \lambda_{\sigma,1}^{\alpha_1} \dots \lambda_{\sigma,n}^{\alpha_n}$$

wobei $\lambda_{\alpha,1}, \dots, \lambda_{\sigma,n}$ die Eigenwerte von σ seien. Zu (1): Lemma 4.1.

Nun erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{HS}_{P^G}(z) &= \sum_{d \geq 0} \mathrm{HF}_{P^G(d)}\, z^d \\
&= \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \sum_{d \geq 0} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=d} \lambda_{\sigma,1}^{\alpha_1} \dots \lambda_{\sigma,n}^{\alpha_n} z^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} \\
&= \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \left(\sum_{i \geq 0} \lambda_{\sigma,1}^i z^i \right) \dots \left(\sum_{i \geq 0} \lambda_{\sigma,n}^i z^i \right) \\
&= \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \left(\frac{1}{1 - \lambda_{\sigma,1} z} \right) \dots \left(\frac{1}{1 + \lambda_{\alpha,n} z} \right) \\
&= \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\det\left(\mathcal{I}_n - z\mathcal{A}_\sigma\right)}
\end{aligned}$$

□

4.3 Beispiel

Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Die Gruppe

$$\mathcal{C}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

operiert auf $V = K^2$ durch Koordinatentransformation. Wir wollen beweisen, dass $P^G = K[f_1, f_2, f_3]$ gilt mit

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad f_2 = x_1^2 x_2^2 \quad \text{und} \quad f_3 = x_1 x_2^3 - x_1^3 x_2$$

1. Es gilt $K[f_1, f_2, f_3] \subseteq P^G$, denn f_1, f_2 und f_3 $\mathcal{C}_4$-invariant sind. Dies ist leicht nachzurechnen.

2. Wir berechnen die Hilbert-Reihe von $A = K[f_1, f_2, f_3]$ mit CoCoA (vgl. Kapitel III) und erhalten

$$\mathrm{HS}_A(z) = \frac{1-z^8}{(1-z^2)(1-z^4)^2}$$

3. Nun wenden wir Moliens Formel an und berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{HS}_{P^G}(z) &= \frac{1}{4}\frac{1}{\det\begin{pmatrix}1-z & 0\\ 0 & 1-z\end{pmatrix}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\det\begin{pmatrix}1+z & 0\\ 0 & 1+z\end{pmatrix}}\\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{\det\begin{pmatrix}1 & -z\\ z & 1\end{pmatrix}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\det\begin{pmatrix}1 & z\\ -z & 1\end{pmatrix}}\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{2}{1+z^2}\right]\\
&= \frac{1+z^4}{(1-z^2)^2(1+z^2)}\\
&= \frac{1+z^4}{(1-z^2)(1-z^4)}\\
&= \frac{1-z^8}{(1-z^2)(1-z^4)^2}
\end{aligned}$$

Dies zeigt $A \subseteq P^G$ und $\mathrm{HS}_A(z) = \mathrm{HS}_{P^G}(z)$ und damit folgt $A = P^G$.

4.4 Satz (Die Lineare-Algebra-Methode)

Sei $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_l\}$ eine Menge von Matrizen, die G erzeugen. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}
\Phi : P &\to \bigoplus_{\sigma \in S} P\\
f &\mapsto (\sigma(f) - f)_{\sigma \in S}
\end{aligned}$$

Dies ist eine homogene K-lineare Abbildung. Für jedes $d \geq 0$ gilt $\left(P^G\right)_d = \ker(\Phi_d)$. Da Φ_d explizit gegeben ist, kann man $\left(P^G\right)_d$ also durch Lösen eines linearen Gleichungssystems über K berechnet werden.

Beweis: Offensichtlich ist Φ K-linear und homogen. Es gilt

$$\begin{aligned}
f \in P^G &\Leftrightarrow \sigma(f) = f \ \forall \sigma \in G\\
&\Leftrightarrow \sigma(f) = f \ \forall \sigma \in S\\
&\Leftrightarrow (\sigma_i(f) - f)_{\sigma \in S} = 0\\
&\Leftrightarrow f \in \ker(\Phi_d)
\end{aligned}$$

Ferner ist Φ homogen, denn alle σ operieren homogen auf P □

4.5 Beispiel

Sei V_4 die Kleinsche Vierergruppe und $\{(1), (1\ 2)(3\ 4) =: \sigma_1, (1\ 4)(3\ 2) =: \sigma_2, (1\ 3)(2\ 4) = \sigma_1\sigma_2\} \subseteq \mathcal{S}_4$ ihre Permutationsdarstellung. Diese Gruppe operiert auf $V = K^4$ durch Permutationsmatrizen, d.h. es sei

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: \sigma_1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \sigma_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1\sigma_2 \right\}$$

Wir wollen die fundamentalen Invarianten von G berechnen.

1. Berechne $\mathrm{HS}_{PG}(z)$ mit Moliens Formel:

$$\mathrm{HS}_{PG}(z) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-z)^4} + \frac{3}{(1-z^2)^2}\right] = \frac{1+z^3}{(1-z)(1-z^2)^3}$$

   Vermutung: eine fundamentale Invariante vom Grad 1 und 3 weitere vom Grad 2.

2. Betrachte

$$\begin{array}{rcl} \Phi_1 : P_1 & \to & P_1^2 \\ l = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 & \mapsto & \begin{pmatrix} \underbrace{c_2x_1 + c_1x_2 + c_4x_3 + c_3x_4 - l}_{=\sigma_1(l)-l} \\ \underbrace{c_4x_1 + c_3x_2 + c_2x_3 + c_1x_4 - l}_{=\sigma_2(l)-l} \end{pmatrix} \end{array}$$

   mit $G = \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\}$. Dann folgt:

$$\ker(\Phi_1) = \left\{ \sum_{i=1}^{4} c_ix_i \mid c_1 = c_2 = c_3 = c_4 \right\} = K \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

   und wir erhalten die erste fundamentale Invariante $f_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

3. Betrachte

$$\begin{array}{rcl} & \Phi_2 : P_2 \to & P_2^2 \\ q = \left.\begin{array}{l} c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 + c_3x_1x_3 + c_4x_1x_4 + c_5x_2^2 \\ +c_6x_2x_3 + c_7x_2x_4 + c_8x_3^2 + c_9x_3x_4 + c_{10}x_4^2 \end{array}\right\} & \mapsto & \begin{pmatrix} c_1x_2^2 + c_2x_1x_2 + c_3x_2x_4 + \ldots - q \\ c_1x_4^2 + c_2x_3x_4 + c_3x_2x_4 + \ldots - q \end{pmatrix} \end{array}$$

   Dann folgt:

$$\ker(\Phi_2) = \left\{ c_1x_1^2 + \ldots + c_{10}x_4^2 \mid c_1 = c_5 = c_8 = c_{10}, c_2 = c_9, c_3 = c_7, c_4 = c_6 \right\} \subseteq P_2$$

   Dies ist ein vierdimensionaler Vektorraum mit Basis

$$\left\{ (x_1 + \ldots + x_4)^2, (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2, (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2, (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \right\}$$

   und wir erhalten drei weitere fundamentale Invarianten:

$$\begin{aligned} f_2 &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \\ f_3 &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 \\ f_4 &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \end{aligned}$$

4. Berechne die Hilbert-Reihe von $A = K[f_1, f_2, f_3, f_4]$ mit CoCoA und erhalte
$$\mathrm{HS}_A(z) \quad = \quad \frac{1}{(1-z)\left(1-z^2\right)^3}$$
5. Analog finde mit Φ_3 die Invariante $f_5 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$.
6. Nun ergibt sich für $B = K[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$ die Hilbert-Reihe
$$\mathrm{HS}_B(z) = \frac{1+z^3}{(1-z)\left(1-z^2\right)^3}$$
7. Also folgt $P^G = B$.

4.6 Beispiel

Sei $K = \mathbb{C}$. Die Gruppe $\mathbb{Z}/_{(2)} \times \mathbb{Z}/_{(4)}$ operiere auf $V = \mathbb{C}^3$ durch die Matrizen
$$G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \sigma_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} =: \sigma_2 \right\rangle$$
mit $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 1$ und $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.
Wir berechnen die fundamentalen Invariante mit obiger Methode.

1. Die Molien-Formel liefert:
$$\begin{aligned} \mathrm{HS}_{P^G}(z) &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1-z)(1+z)^2} + \ldots + \frac{1}{(1-z)^2(1-iz)}\right] \\ &= \frac{1}{\left(1-z^2\right)^3} \end{aligned}$$
2. Die naheliegende Vermutung, dass es drei fundamentale Invarianten vom Grad 2 gibt ist falsch. Betrachte
$$\begin{array}{rcl} \Phi_2 : P_2 & \to & (P_2)^2 \\ q = \left.\begin{array}{l} c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 + c_3x_1x_3 \\ +c_4x_2^2 + c_5x_2x_3 + c_6x_3^2 \end{array}\right\} & \mapsto & \begin{pmatrix} c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 - c_3x_1x_2 + c_4x_2^2 - c_5x_2x_3 + c_6x_3^2 - q \\ c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 + ic_3x_1x_3 + c_4x_2^2 + ic_5x_2x_3 - c_6x_3^2 - q \end{pmatrix} \end{array}$$
Es folgt $c_3 = c_5 = c_6 = 0$ und daher $\left(P^G\right)_2 = Kx_1^2 \oplus Kx_1x_2 \oplus Kx_2^2$. Für $f_1 = x_1^2$, $f_2 = x_1x_2$ und $f_3 = x_2^2$ gilt $A = K[f_1, f_2, f_3] \subseteq P^G$.
3. Die Hilbert-Reihe von A ist
$$\mathrm{HS}_A(z) = \frac{1+z^2}{\left(1-z^2\right)^2} \neq \mathrm{HS}_{P^g}(z)$$
Also gibt es noch weitere fundamentale Invarianten.
4. Es zeigt sich: $\ker(\Phi_3) = \{0\}$, $\ker(\Phi_4) = \left\langle f_1^2, f_1f_2, f_1f_3, f_2f_3, f_3^2, x_3^4 \right\rangle$. Daher ist $f_4 = x_3^4$ eine weitere fundamentale Invariante.
5. Für den Ring $B = K[f_1, f_2, f_3, f_4]$ folgt nun
$$\mathrm{HS}_B(z) = \frac{1}{\left(1-z^2\right)^3} = \mathrm{HS}_{P^G}(z)$$
und daher $P^G = B = K[f_1, f_2, f_3, f_4]$.