5 Was sind primäre und sekundäre Invariante?

Im Folgenden sei K ein Körper und R eine endlich erzeugte, positiv graduierte K-Algebra, also $R = K[y_1, \ldots, y_s]/I$ mit $\deg(y_i) \geq 1$ und I homogen.

5.1 Definition

Eine Menge von homogene Elemente $\{f_1, \ldots, f_d\} \subseteq R$ heißt ein **homogenes Parametersystem** von R falls $\{f_1, \ldots, f_d\}$ algebraisch unabhängig und R ein endlich erzeugter $K[f_1, \ldots, f_d]$-Modul ist.

Ist $R = P^G$ ein Invariantenring und $\{f_1, \ldots, f_d\} \subseteq P^G$ ein homogenes Paramtersystem, so heißt $\{f_1, \ldots, f_d\}$ auch eine Menge **primärer Invarianten**. Ein Erzeugendensystem $\{g_1, \ldots, g_l\} \subseteq P^G$ des $K[f_1, \ldots, f_d]$-Moduls P^G heißt dann eine Menge **sekundärer Invarianten**.

5.2 Beispiel

Im Beispiel 4.6 war $P^G = K\left[x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3^4\right]$. Hierbei ist z.B. $\left\{x_1^2, x_2^2, x_3^4\right\}$ ein System primärer Invarianten. Sei $A = K\left[x_1^2, x_2^2, x_3^4\right]$. Dann ist P^G als A-Modul erzeugt von $\{1, x_1x_2\}$.

Beachte: $P^G = A[t]/\left(t^2\right) = A \oplus At$.

5.3 Bemerkungen

a) Die maximale Länge d einer Primidealkette $\mathcal{P}_0 \subsetneq \mathcal{P}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{P}_d$ in R heißt auch **Krull-Dimension** von R und wird mit $\dim(R)$ bezeichnet. Man kann die Krulldimension aus der Hilbert-Reihe von R bestimmen und mit CoCoA berechnen.

b) Genau dann ist eine Menge homogener Elemente $\{f_1, \ldots, f_d\}$ ein homogenes Parametersystem von R, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $d = \dim(R)$ und $\dim(R/(f_1, \ldots, f_d)) = 0$
2. $d = \dim(R)$ und $\dim(R/(f_1, \ldots, f_i)) = d - i$ für $i = 0, \ldots, d$.

Der Beweis folgt aus dem nächsten Theorem.

5.4 Theorem (Der Noethersche Normalisierungssatz)

Sei R eine endlich erzeugte, positiv graduierte K-Algebra. Dann existiert ein homogenes Parametersystem.

Beweisskizze: Zuerst zeigen wir:

Behauptung 1: Eine Menge $\{f_1, \ldots, f_d\} \subseteq R_+ = \bigoplus_{i>0} R_i$ von homogenen Elementen ist genau dann ein homogenes Parametersystem ist, wenn $\dim(R/(f_1, \ldots, f_d)) = 0$ gilt.

Nach Definition und dem Lemma 3.9 (Nakayama) ist $\{f_1, \ldots, f_d\}$ genau dann ein homogenes Parametersystem, wenn $\dim_K(R/(f_1, \ldots, f_d)) < \infty$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $[R/(f_1, \ldots f_d)]_i = 0$ gilt für $i > 0$, also genau dann, wenn $R_+ = \sqrt{(f_1, \ldots, f_d)}$ gilt. Letzteres bedeutet gerade $\dim(R/(f_1, \ldots, f_d)) = 0$. Damit folgt die Behauptung 1.

Behauptung 2: Ist $\{f_1, \ldots, f_d\}$ ein homogenes Parametersystem, so gilt $d = \dim(R)$.

Nach dem (verallgemeinerten) Krullschen Hauptidealsatz ([KR2], §5.6) gilt:

$$\dim(R/(f_1, \ldots, f_i)) \quad \geq \quad \dim(R/(f_1, \ldots, f_{i-1})) - 1$$

Dies zeigt $0 = \dim(R/(f_1, \ldots, f_d)) \geq \dim(R) - d$, also $d \geq \dim(R)$. Andererseits gilt $\dim(K[f_1, \ldots, f_d]) = d$, da $\{f_1, \ldots, f_d\}$ algebraisch unabhängig ist, also wegen $K[f_1, \ldots, f_d] \subseteq R$ auch $d \leq \dim(R)$. Damit folgt Behauptung 2.

Zum Beweis des Theorems gehen wir jetzt induktiv nach $d = \dim(R)$ vor:

$d = 0$: R ist endlich-dimensionaler Vektorraum, $\{f_1, \ldots, f_d\}$ ist Parametersystem.

$d > 0$: Nach dem Primidealvermeidungslemma ([KR2], §5.6) gibt es ein homogenes $f_1 \in R_+$ das ein Nichtnullteiler von R ist und somit $\dim(R/(f_1)) = \dim(R) - 1$. Nun wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf $R/(f_1)$ an und erhalten ein homogenes Paramtersystem $\left\{\overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_d\right\}$. Dann ist $\{f_1, \ldots, f_d\}$ nach Behauptung 1 ein homogenes Paramtersystem. □

5.5 Korollar

Eine endliche Gruppe G operiere linear auf einem n-dimensionalen K-Vektorraum V und damit auf $P = K[V] = K[x_1, \ldots, x_n]$. Dann gilt:

a) $\dim\left(P^G\right) = n = \dim(P) = \dim_K(V)$.

b) Es gibt ein System primärer Invarianten$\{f_1, \ldots, f_n\}$ mit $d = n$.

c) Jedes System primärer Invarianten hat n Elemente.

Beweis:

Zu (a): Es genügt zu zeigen, dass P ein endlich erzeugter P^G-Modul ist. Sei dann $\{f_1, \ldots, f_d\}$ ein homogenes Parametersystem von P^G. Dann ist mit P^G auch P ein endlich erzeugter $K[f_1, \ldots, f_d]$ -Modul und aus $\dim(P) = n$ folgt $d = n$.

Jedes homogene Element $f \in P_+$ ist Nullstelle eines normierten Polynoms

$$\prod_{\sigma \in G} (t - \sigma(f)) \in P^G[t].$$

Man sagt, dass f **ganz** ist über P^G. Die Ringerweiterung $P^G \hookrightarrow P$ heißt dann eine **ganze** Ringerweiterung. Jede endlich erzeugte ganze Ringerweiterung ist endlich erzeugt als Modul: Adjungiere zu P^G ein Element $\{x_1, \ldots, x_n\}$ nach dem anderen und verwende, dass $R[x_i]$ als R-Modul endlich erzeugt ist, denn aus $x_i^d + c_{d-1}x_i^{d-1} + \ldots + c_0 = 0$ folgt $x_i^d = -c_{d-1}x^{d-1} - \ldots - c_0$. Damit : $R[x_i]$ wird als R-Modul von $\left\{1, x_i, \ldots, x_i^{d-1}\right\}$ erzeugt. Also ist P ein endlich erzeugter P^G-Modul.

Zu (b), (c): Die Behauptung folgen aus Teil (a). □

5.6 Beispiel

a) In Beispiel 1.7 gilt $P^G = \mathbb{R}[f_1, f_2, f_3]$ mit

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad f_2 = x_1^2 x_2^2 \quad \text{und} \quad f_3 = x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3$$

Hierbei ist z.B. $\{f_1, f_2\}$ ein System primärer Invarianten, denn

$$\begin{aligned} f_3^2 &= x_1^6 x_2^2 + x_1^2 x_2^6 - 2x_1^4 x_2^4 \\ &= x_1^2 x_2^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) - 4\left(x_1^2 x_2^2\right)^2 \end{aligned}$$

Die sekundären Invarianten sind also $\{1, f_3\}$.

b) In Beispiel 1.8 mit $G = \mathcal{S}_n$ gilt $P^G = K[s_1, \ldots, s_n] \subseteq P$ und $\{s_1, \ldots, s_n\}$ ist ein System primärer Invarianten.

c) In Beispiel 4.5 mit $G = V_4$ war $P^G = K[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]$ mit

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ f_2 &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \\ f_3 &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 \\ f_4 &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \\ f_5 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 + x_4^3 \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_2 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_3 &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ y_4 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Dann ist $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ eine Basis von V und $K[f_1, f_2, f_3, f_4] = K\left[y_1, y_2^2, y_3^2, y_4^2\right]$ ist ein Polynomring. Also ist $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ ein System primärer Invarianten und (? - FIXME: Nachrechnen) $\{1, f_5\}$ ist ein System sekundärer Invarianten.

5.7 Beispiel

Sei $G \subseteq \mathcal{S}_n$ eine Untergruppe, die mittels Variablenpermutation auf $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ operiert. Dann ist $\{s_1, \ldots, s_n\}$ ein System primärer Invarianten in P^G, denn:

1. $\{s_1, \ldots, s_n\} \in P^{S_n} \subseteq P^G$
2. $\{s_1, \ldots, s_n\}$ ist algebraisch unabhängig, also $\dim(K[s_1, \ldots, s_n]) = \dim\left(P^{S_n}\right) = n$

5.8 Bemerkung

Viele Algorithmen berechnen erst die primären, dann die sekundären Invarianten von G.