7 Wie berechnet man das Relationenideal?

Ziel: Löse das zweite und dritte fundamentale Problem der Invariantentheorie mittels Eliminationstheorie, also mit Gröbnerbasenberechnung.

Sei K ein Körper, $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ und $\mathbb{T}^n = \{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$.

7.1 Definition

Eine Termordnung σ auf $\mathbb{T}^n$ heißt **Eliminationsordnung** für $L \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ wenn gilt: Sind $t, t' \in \mathbb{T}^n$ Terme mit $t' \in K[x_i \mid x_i \notin L] = \hat{P}$ und $x_i \mid t$ für mindestens ein $x_i \in L$, so folgt $t >_\sigma t'$.

7.2 Beispiel

Ist $L = \{x_1, \ldots, x_i\}$ mit $i < n$ so ist $\sigma = \text{Lex}$ eine Eliminationsordnung für L.

7.3 Theorem (Eliminationsberechnung mit Gröbnerbasen)

Sei σ eine Eliminationsordnung für $L \subseteq [x_1, \ldots, x_n]$, sei $I \subseteq P$ Ideal und sei $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ eine σ-Gröbnerbasis von I. Dann ist $\hat{G} = G \cap \hat{P}$ eine $\hat{\sigma}$-Gröbnerbasis des **Eliminationsideals** $\hat{I} = I \cap K[x_i \mid x_i \notin L] = I \cap \hat{P}$, wobei $\hat{\sigma}$ die Restriktion von σ auf $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{T}\left(\hat{P}\right)$ bezeichnet.

Beweis: Offensichtlich gilt $\left\langle \hat{G} \right\rangle \subseteq \hat{I}$, also $\left\langle \mathrm{LT}_{\hat{\sigma}}\left(\hat{G}\right) \right\rangle \subseteq \mathrm{LT}_{\hat{\sigma}}\left(\hat{I}\right)$.

Sei nun $f \in \hat{I} = I \cap \hat{P}$ mit $f \neq 0$. Wegen $f \in I$ gibt es eine Darstellung $\mathrm{LT}_\sigma(f) = t\,\mathrm{LT}_\sigma(g_i)$ mit $g_i \in G$ und $t \in \mathbb{T}^n$. Wegen $\mathrm{LT}_\sigma(f) \in \hat{P}$ gilt somit $t \in \hat{P}$ und $\mathrm{LT}_\sigma(g_i) \in \hat{P}$. Für alle Terme $\hat{t}$ im Träger von g_i gilt $\hat{t} \leq_\sigma \mathrm{LT}(g_i)$. Damit folgt aus $\mathrm{LT}_\sigma(g_i) \in \hat{P}$ auch $\hat{t} \in \hat{P}$, also $g_i \in \hat{P}$ und deswegen $g_i \in G \cap \hat{P} = \hat{G}$. Die Behauptung folgt nun aus $\mathrm{LT}_{\hat{\sigma}}(f) = t\,\mathrm{LT}_{\hat{\sigma}}(g_i)$ □

7.4 Beispiel

Seien $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und $J = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ zwei Ideale in P. Dann gilt in $P[y]$ die Gleichung:

$$I \cap J = \langle yf_1, \ldots, yf_r, (1-y)\,g_1, \ldots, (1-y)\,g_s \rangle \cap P$$

denn

$$h = a_1 y f_1 + \ldots + a_t y f_r + b_1 (1-y)\,g_1 + \ldots + b_s (1-y)\,g_s \in P \quad \text{wobei } a_i, b_j \in P[y]$$

liefert durch $y \mapsto 0$ das Polynom

$$h = h|_{y \mapsto 0} = \overline{b_1} g_1 + \ldots + \overline{b_s} g_s \in J$$

und durch $y \mapsto 1$ das Polynom

$$h = h|_{y \mapsto 1} = \overline{a_1} f_1 + \ldots + \overline{a_r} f_r \in I$$

7.5 Satz (Berechnung des Relationenideals)

Seien $f_1, \ldots, f_s \in P \setminus \{0\}$ und sei $A = K[f_1, \ldots, f_s] \subseteq P$. Der Kern des K-Algebra-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi : K[y_1, \ldots, y_s] &\to P \\ y_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

heißt das Relationenideal $I(f_1, \ldots, f_s)$von $(f_1, \ldots, f_s)$.
In dem Polynomring $Q = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s]$ bilde das **Diagonalideal**

$$J = \langle y_1 - f_1, \ldots, y_s - f_s \rangle$$

Dann gilt

$$I(f_1, \ldots, f_s) = J \cap [y_1, \ldots, y_s].$$

Beweis:
Zu "$\supseteq$": Sei

$$g \quad = \quad h_1(y_1 - f_1) + \ldots + h_s(y_s - f_s) \in J \cap K[y_1, \ldots, y_s] \quad \text{mit } h_1, \ldots, h_s \in Q.$$

Substituiere $y_i \mapsto f_i$ und erhalte $g(f_1, \ldots, f_s) = 0$, d.h. es gilt $g \in \ker(\Phi)$.
Zu "$\subseteq$": Sei $g \in \ker(\Phi)$, also $g \in K[y_1, \ldots, y_s]$ mit $g(f_1, \ldots, f_s) = 0$. Betrachte den K-Algebren-Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \Psi : Q & \to & Q \\ x_i & \mapsto & x_i \\ y_j & \mapsto & y_j + f_j \end{array}$$

Schreibe

$$\begin{array}{rcl} \Psi(g) & = & g(y_1 + f_1, \ldots, y_s + f_s) \\ & = & \tilde{h}_1 y_1 + \ldots + \tilde{h}_s y_s + r \quad \text{mit } r \in K[x_1, \ldots, x_n] \end{array}$$

Substituiere hier $y_i \mapsto 0$ und erhalte

$$\underbrace{g(f_1, \ldots, f_s)}_{=0} \quad = \quad r$$

Also gilt $\Psi(g) = \tilde{h}_1 y_1 + \ldots + \tilde{h}_s y_s$. Offenbar ist

$$\begin{array}{rcl} \Psi^{-1} : Q & \to & Q \\ x_i & \mapsto & x_i \\ y_j & \mapsto & y_j - f_j \end{array}$$

der zu Ψ inverse K-Algebren Homomorphismus. Es folgt:

$$\begin{array}{rcl} g & = & \Psi^{-1}(\Psi(g)) \\ & = & \Psi^{-1}\left(\tilde{h}_1 y_1 + \ldots + \tilde{y}_s h_s\right) \\ & = & \Psi^{-1}\left(\tilde{h}_1\right)(y_1 - f_1) + \ldots + \Psi^{-1}\left(\tilde{h}_s\right)(y_s - f_s) \in J \end{array}$$

Also gilt $g \in J \cap K[y_1, \ldots, y_s]$. □

7.6 Beispiel

In Beispiel 3.7 war

$$P^G = \mathbb{R}\left[x_1^2 + x_2^2, x_1^2 x_2^2, x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3\right] \subseteq P = \mathbb{R}[x_1, x_2]$$

In $Q = \mathbb{R}[x_1, x_2, y_1, y_2, y_3]$ bilde das Diagonalideal

$$J = \left\langle y_1 - x_1^2 - x_2^2, y_2 - x_1^2 x_2^2, y_3 - x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3 \right\rangle$$

und berechne

$$I(f_1, f_2, f_3) = J \cap \mathbb{R}[y_1, y_2, y_3]$$

CoCoA liefert uns das Ergebnis

$$I(f_1, f_2, f_3) \quad = \quad \left\langle y_1^2 y_2 - 4y_2^2 - y_3^2 \right\rangle$$

Beachte, das der $\mathbb{R}$-Algebren Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \Phi : K[y_1, y_2, y_3] & \mapsto & \mathbb{R}[x_1, x_2] \\ y_i & \mapsto & f_i \end{array}$$

homogen ist, wenn man $\deg(y_1) = 2$, $\deg(y_2) = \deg(y_3) = 4$ setzt. Dann ist auch $I(f_1, f_2, f_3)$ homogen bzgl. dieser Graduierung.

7.7 Satz (Bilder von K-Algebrenhomomorphismen)

Sei

$$\begin{array}{rcl} \Phi : K[y_1, \ldots, y_s] & \to & P = K[x_1, \ldots, x_n] \\ y_i & \mapsto & f_i \end{array}$$

ein K-Algebra-Homomorphismus. Sei $Q = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s]$, sei $J = \langle y_1 - f_1, \ldots, y_s - f_s \rangle$ das Diagonalideal und sei σ eine Eliminationsordnung für $L = [x_1, \ldots, x_n]$ auf Q. Dann gilt:

(a) Ein Polynom $g \in P$ liegt genau dann im Bild von Ψ, wenn $\mathrm{NF}_{\sigma,J}(g) \in K[y_1, \ldots, y_s]$. (Unteralgebrazugehörigkeitstest)

(b) Wenn ein Polynom $g \in P$ die Bedingung $h = \mathrm{NF}_{\sigma,J}(g) \in K[y_1, \ldots, y_s]$ genügt, so ist $g = h(f_1, \ldots, f_s)$ eine explizite Darstellung von g als Element von $A = K[f_1, \ldots, f_s]$. (Explizite Unteralgebrazugehörigkeit)

(c) Der K-Algebra-Homomorphismus Φ ist genau dann surjektiv, wenn die (reduzierte) σ-Gröbnerbasis G von J für $i = 1, \ldots, n$ Elemente der Form $x_i - h_i$ mit $h_i \in K[y_1, \ldots, y_s]$ enthält.

Beweis:
Zu (a): "$\Leftarrow$" Sei $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ die σ-Gröbnerbasis von J. Wende auf $g \in P \subset Q$ die Reduktionsschritte mittels $\xrightarrow{G}$ an und erhalte eine Darstellung

$$g = q_1 g_1 + \ldots + q_r g_r + \mathrm{NF}_{\sigma,J}(g) \quad \text{mit } q_1, \ldots, q_r \in Q$$

Substituiere hier $y_i \mapsto f_i$ und verwende, dass $\mathrm{NF}_{\sigma,J}(g) \in K[y_1, \ldots, y_s]$. Dann gilt:

$$g = g|_{y_i \mapsto f_i} \stackrel{(1)}{=} [\mathrm{NF}_{\sigma,J}(g)](f_1, \ldots, f_s) = h(f_1, \ldots, f_s) \in \mathrm{Bild}(\Phi) \quad \text{mit } h = \mathrm{NF}_{\sigma,J}(g)$$

Zu (1): $g_i(x_1, \ldots, x_n, f_1, \ldots, f_s) = 0$.
"$\Rightarrow$": Sei $g \in \mathrm{Bild}(\Phi)$, also $g = h(f_1, \ldots, f_s)$ mit $h \in K[y_1, \ldots, y_s]$. Dann gilt

$$g - h(f_1, \ldots, f_s) = 0 \in J \quad \text{und} \quad h - h(f_1, \ldots, f_s) \in J$$

Damit folgt:
$$\mathrm{NF}_{\sigma,J}(g) = \mathrm{NF}_{\sigma,J}(h(f_1,\ldots,f_s)) = \mathrm{NF}_{\sigma,J}(h) \in K[y_1,\ldots,y_s]$$
da $h \in K[y_1,\ldots,y_s]$ und σ Eliminationsordnung für $\{x_1,\ldots,x_n\}$.
Zu (b): Wurde bereits oben mitbewiesen.
Zu (c): "$\Leftarrow$": Ist $x_i - h_i \in G$ so folgt $\mathrm{NF}_{\sigma,J}(x_i) = \mathrm{NF}_{\sigma,J}(h_i) \in K[y_1,\ldots,y_s]$. Also ergibt sich $x_i \in \mathrm{Bild}(\Phi)$ für $i = 1,\ldots,n$.
"$\Rightarrow$": Ist $x_i \in \mathrm{Bild}(\Phi)$ so ist $h_i = \mathrm{NF}_{\sigma,J}(x_i) \in K[y_1,\ldots,y_s]$ und es gilt:
$$x_i - h_i = x_i - \mathrm{NF}_{\sigma,J}(x_i) \in J$$
Wegen $\mathrm{LT}_\sigma(x_i - h_i) = x_i$ ist x_i ein minimaler Erzeuger von $\mathrm{LT}_\sigma(J)$. Also muss in G ein Element der Form $x_i - k_i$ vorkommen mit $x_i >_\sigma \mathrm{LT}_\sigma(k_i)$Wegen h_i und k_i sind irreduzibel bzgl. $\xrightarrow{G}$ und da
$$h_i - k_i = (x_i - k_i) - (x_i - h_i) \in J$$
gilt, folgt $h_i = k_i$, also $k_i \in K[y_1,\ldots,y_s]$ und $x_i - h_i \in G$. $\square$

7.8 Beispiel

In Beispiel 1.6 und 2.3 gilt
$$P^G = \mathbb{R}[d_{12}, d_{13}, d_{23}] \subseteq \mathbb{R}[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3] \quad \text{mit } d_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$
Das Polynom
$$g = x_1^2 + y_1^2 - x_1x_2 - y_1y_2 - x_1x_3 - y_1y_3 + x_2x_3 + y_2y_3$$
liegt in P^G wie wir folgendermaßen nachprüfen können: Wir bilden den Ring $Q = P[z_1, z_2, z_3]$ und das Diagonalideal
$$J = (z_1 - d_{12}, z_2 - d_{13}, z_3 - d_{23}) \subseteq Q$$
Sei σ eine Eliminationsordnung für $\{x_1,\ldots,y_3\}$ auf Q. Wir berechnen eine σ-Gröbnerbasis G von J und
$$\mathrm{NF}_{\sigma,J}(g) = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_3$$
Also $g = \frac{1}{2}d_{12} + \frac{1}{2}d_{13} - \frac{1}{2}d_{23}$ (vgl. auch Übungsaufgabe 2b).