8 Wie berechnet man die Hilbert-Reihe einer graduierten Unteralgebra?

Sei K ein Körper und $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ graduiert durch $\deg(x_i) = d_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Ferner sei $I \subseteq P$ ein homogenes Ideal.

Ziel: Finde

$$\mathrm{HS}_{P/I}(z) = \sum_{i \geq 0} \mathrm{HF}_{P/I}(i)\, z^i = \frac{\mathrm{HN}_{P/I}(z)}{(1 - z^{d_1}) \ldots (1 - z^{d_n})}$$

mit

$$\mathrm{HF}_{P/I}(i) = \dim_K\left((P/I)_i\right) \quad \text{für } i \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \mathrm{HN}_{P/I}(z) \in \mathbb{Z}[z]$$

8.1 Satz (Macaulays Basissatz)

Sei σ eine Termordnung. Dann bilden die Restklassen der Terme in $\mathcal{O}_\sigma(I) = \mathbb{T}^n \backslash \mathrm{LT}_\sigma(I)$ eine K-Vektorraumbasis von P/I.

Beweis:

Erzeugendensystem: Zu zeigen ist $U = I + \langle \mathcal{O}_\sigma(I) \rangle_K = P$.

Angenommen, es gilt $U \subsetneqq P$, d.h. es gibt ein Element $f \in P \backslash U$. Wähle ein solches Element mit minimalem Leitterm bzgl. σ. Dann hat $f - \mathrm{LC}_\sigma(f)\ \mathrm{LT}_\sigma(f) \in P \backslash U$ einen kleineren Leitterm. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Lineare Unabhängigkeit: Sei $f = c_1 t_2 + \ldots + c_s t_s \in I$ mit $t_1, \ldots, t_s \in \mathcal{O}_\sigma(I)$ und $c_1, \ldots, c_s \in K \backslash \{0\}$, d.h. es sei $c_1 \overline{t_1} + \ldots + c_s \overline{t_s} = 0$ in P/I. Dann folgt $\mathrm{LT}_\sigma(f) \in \{t_1, \ldots, t_s\}$, also $\mathrm{LT}_\sigma(f) \in \mathcal{O}_\sigma(I)$. Dies ist ein Widerspruch zu $f \in I$ und daher $\mathrm{LT}_\sigma(f) \in \mathrm{LT}_\sigma(I)$, da $f \neq 0$ gilt. □

8.2 Korollar

a) Man kann einzelne Werte $\mathrm{HF}_{P/I}(i)$ berechnen mittels

$$\mathrm{HF}_{P/I}(i) \quad = \quad \#\{t \in \mathcal{O}_\sigma(I) \mid \deg(t) = i\}$$

b) Es gilt

$$\mathrm{HF}_{P/I}(i) \quad = \quad \mathrm{HF}_{P/\mathrm{LT}_\sigma(I)}(i) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z}$$

c) Es gilt

$$\mathrm{HS}_{P/I}(z) = \mathrm{HS}_{P/\mathrm{LT}_\sigma(I)}(z) = \mathrm{HS}_P(z) - \mathrm{HS}_{\mathrm{LT}_\sigma(I)}(z)$$

MaW: Es genügt, einen Algorithmus für die Berechnung von $\mathrm{HS}_{P/J}(z)$ im Falle eines monomiales Ideals $J \subseteq P$ zu finden.

Beweis:

Zu (a): Die Terme $\mathcal{O}_\sigma(I)_i = \mathbb{T}^n_i \backslash \mathrm{LT}_\sigma(I)_i$ bilden eine K-Basis von $(P/I)_i$.

Zu (b): Die Aussage folgt aus (a) und $\mathrm{LT}_\sigma(\mathrm{LT}_\sigma(I)) = \mathrm{LT}_\sigma(I)$. Somit ist $\mathcal{O}_\sigma(I)$ eine K-Basis für P/I und für $P/\mathrm{LT}_\sigma(I)$.

Zu (c): Die Aussage folgt aus (b). □

8.3 Bemerkung

Die Berechnung von Hilbert-Reihen verwendet Multiplikationssequenzen.
Sei R positiv graduiert und $f \in R$ homogen vom Grad d. Dann sei

$$R(-d) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R(-d)_i = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_{-d+i}$$

der um $-d$ gradverschobene R-Modul. Dann ist die Multiplikationsabbildung

$$\begin{array}{rcl} \mu_f : R(-d) & \to & R \\ r & \mapsto & rf \end{array}$$

eine homogene Abbildung, denn für ein Element $r \in R(-d)_i = R_{i-d}$ gilt: $rf \in R_i$.
Ferner sei $0 :_R f = \{r \in R \mid rf = 0\}$ der **Annulator** von f. Er ist ein homogenes Ideal in R. Insgesamt ist die Sequenz

$$0 \to (0 :_R f)(-d) \to R(-d) \xrightarrow{\mu_f} R \to R/(f) \to 0$$

homogen und exakt. Also ist auch

$$\underbrace{0 \to [R/(0 :_R f)](-d) \xrightarrow{\mu_f} R \to R \to R/(f) \to 0}_{(1)}$$

homogen und exakt. Diese Sequenz (1) heißt die zu f gehörige **Multiplikationssequenz** zu f. Sie liefert

$$\mathrm{HF}_{R/(f)}(i) = \mathrm{HF}_R(i) - \mathrm{HF}_R(i-d) + \mathrm{HF}_{0:f}(i-d)$$

Ist f ein Nichtnullteiler für R, f.h. ist $0 :_R f = 0$, so folgt

$$\mathrm{HF}_{R/(f)}(i) = \underbrace{\Delta^d \,\mathrm{HF}_R(i)}_{(1)} = \mathrm{HF}_R(i) - \mathrm{HF}_R(i-d)$$

wobei wir (1) als die d-te Differenzenfunktion bezeichnen.
Für die Hilbert-Reihe folgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{HS}_{R/(f)}(z) & = & \left(1 - z^d\right) \mathrm{HS}_R(z) + z^d \,\mathrm{HS}_{0:_R f}(z) \\ & = & \mathrm{HS}_R(z) - z^d \,\mathrm{HS}_{R/(0:_R f)}(z) \end{array}$$

8.4 Theorem (Der klassische Hilbert-Zähler-Algorithmus)

Sei $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ graduiert durch $\deg(x_i) = \delta_i$. Sei $I \subsetneqq P$ ein monomiales Ideal. Betrachte die durch die folgenden Schritte definierte Prozedur MonHN(I):

(1) Sei $\{t_1, \ldots, t_s\}$ das minimale monomiale Erzeugendensystem von I. Ist $s = 1$, so setze $d = \deg(t_1)$, gib $1 - z^d$ aus und stoppe. Andernfalls wähle $p \in \{t_1, \ldots, t_s\}$ und sei J das von $\{t_1, \ldots, t_s\} \setminus \{p\}$ erzeugte monomiale Ideal.

(2) Rufe MonHN(J) und MonHN($J : p$) auf und seien $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die berechneten Ergebnisse. Hierbei ist

$$J : p = \left\langle \frac{\mathrm{kgV}(t_i, p)}{p} \right\rangle_{t_i \neq p}$$

(3) Sei $d = \deg(p)$. Gib $f_1(z) - z^d f_2(z)$ aus und stoppe.

Dies ist eine Algorithmus (rekursiv definierte Funktion), die den Hilbert-Zähler $\mathrm{HN}_{P/I}(z)$ berechnet. Dann gilt

$$\mathrm{HS}_{P/I}(z) = \frac{\mathrm{HN}_{P/I}(z)}{\prod_i (1 - z^{d_i})}$$

Beweis:
Endlichkeit: In Schritt (2) ruft sich MonHN(...) zweimal selbst auf. In beiden Fällen wir des Argumentideal von weniger als s Monomen erzeugt. Also gilt irgendwann $s = 1$ und die Prozedure stoppt in Schritt (1).
Korrektheit: Im Fall $s = 1$ gilt $I = (t_1)$ und die Multiplikationssequenz

$$0 \to P(-d) \xrightarrow{\mu_{t_1}} P \to P/I \to 0$$

liefert

$$\mathrm{HS}_{P/I}(z) = \left(1 - z^d\right)\mathrm{HS}_P(z) = \frac{1 - z^d}{\prod_i (q - z^{d_i})}$$

Sei nun $s > 1$. Mit Induktion nach s können wir ausrechnen, dass $\mathrm{HN}_{P/J}(z) = f_1(z)$ und $\mathrm{HN}_{P/J:(p)} = f_2(z)$ korrekt berechnet wird. Betrachte die Multiplikationssequenz

$$0 \to (P/J : (p))(-d) \xrightarrow{\mu_p} P/J \to P/I \to 0$$

und erhalte

$$\mathrm{HN}_{P/I}(z) = \mathrm{HN}_{P/J}(z) - z^d\,\mathrm{HN}_{P/J:(p)}(z) = f_1(z) - z^d f_2(z)$$

Also wird auch $\mathrm{HN}_{P/I}(z)$ korrekt berechnet. □

8.5 Korollar

Die Hilbert Reihe einer endlich erzeugten, positiv graduierten K-Algebra $R = P/I$ mit $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ graduiert durch $\deg(x_i) = \delta_i > 0$ hat die Gestalt

$$\mathrm{HS}_R(z) \quad = \quad \frac{\mathrm{HN}_R(z)}{(1 - z^{\delta_1})\ldots(1 - z^{\delta_n})}$$

mit einem Polynom $\mathrm{HN}_R(z) \in \mathbb{Z}[z]$ mit $\mathrm{HN}_R(0) = 1$.
Beweis: Verwende $\mathrm{HS}_R(z) = \mathrm{HS}_{P/\mathrm{LT}_\sigma(I)}(z)$ und Induktion über die Zahl der Schritte von MonHN$(\cdot)$.□

8.6 Beispiel

In Beispiel 4.3 betrachte $A = K[f_1, f_2, f_3] \subseteq K[x_1, x_2]$ mit

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 \quad f_2 = x_1^2 x_2^2 \quad \text{und} \quad f_3 = x_1 x_2^3 - x_1^3 x_2$$

1) Betrachte den K-Algebra Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \Phi : K[y_1, y_2, y_3] & \to & A \\ y_i & \mapsto & f_i \end{array}$$

2) Berechne $\ker(\Phi) = \left\langle y_1^2 y_2 - 4y_2^2 - y_3^2 \right\rangle = J$.
3) Für $\sigma = \mathrm{Lex}$ erhalte $\mathrm{LT}_\sigma(J) = \left(y_1^2 y_2\right)$.

4) Graduiere $\tilde{P} = L[y_1, y_2, y_3]$ durch $\deg(y_1) = 2$, $\deg(y_2) = \deg(y_3) = 4$. Dann ist Φ homogen und es gilt

$$\mathrm{HS}_A(z) = \mathrm{HS}_{\tilde{P}/J}(z) = \mathrm{HS}_{\tilde{P}/\mathrm{LT}_\sigma(j)}(z)$$

5) Verwende Theorem 8.4 und erhalte

$$\mathrm{HN}_{P/\mathrm{LT}_\sigma(J)}(z) = 1 - z^8$$

6) Also folgt:

$$\mathrm{HS}_A(z) = \frac{1 - z^8}{(1 - z^8)(1 - z^4)^2} = \frac{1 + z^4}{(1 - z^8)(1 - z^4)}$$

8.7 Beispiel

a) In Beispiel 4.5 betrachte $A = K[f_1, \ldots, f_4] \subseteq K[x_1, \ldots, x_4]$ mit

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = l_1 \\ f_2 & = & (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 = l_2^2 \\ f_3 & = & (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 = l_3^2 \\ f_4 & = & (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = l_4^2 \end{array}$$

1) Berechne der Kern von

$$\begin{array}{rcl} \Phi : K[y_1, \ldots, y_4] & \to & A \\ y_i & \mapsto & f_i \end{array}$$

und erhalte $J = \ker(\Phi) = (0)$.
2) Es folgt

$$\mathrm{HS}_A(z) = \frac{1}{(1 - z)(1 - z^2)^3} = \mathrm{HS}_{\tilde{P}}(z)$$

mit $\deg(y_1) = 1$, $\deg(y_2) = \deg(y_3) = \deg(y_4) = 2$.
b) Nun betrachte $B = K[f_1, \ldots, f_5] \subseteq P$ mit $f_1, \ldots, f_4$ wie oben und

$$f_5 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$$

1) Berechne den Kern von

$$\begin{array}{rcl} \Psi : K[y_1, \ldots, y_5] & \to & B \\ y_i & \mapsto & f_i \end{array}$$

und erhalte

$$\ker(\Psi) = \left(y_1^6 + 6y_1^4 y_2 + 9y_1^2 y_2^2 + 6y_1^4 y_3 + \ldots + 256 y_5^2\right) =: J$$

2) Wähle $\sigma = \mathrm{Lex}$ und erhalte $\mathrm{LT}_\sigma(J) = \langle y_1^6 \rangle$.
3) Berechne $\mathrm{HN}_{\tilde{P}/\mathrm{LT}_\sigma(J)}(z)$ mit Theorem 8.4 und erhalte

$$\mathrm{HS}_B(z) = \frac{\mathrm{HN}_{\tilde{P}/\mathrm{LT}_\sigma(J)}(z)}{(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3)} = \frac{1 + z^3}{(1 - z)(1 - z^2)^3}$$