9 Wozu nützt die Kenntnis der Hilbert-Reihe einer graduierten Unteralgebra?

Ziel: Zeige wie man die Kenntnis von $\mathrm{HN}_{P/I}(z)$ verwenden kann um die Berechnung einer σ-Gröbnerbasis von I zu beschleunigen.

Im Folgenden sei K ein Körper, $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ positiv graduiert durch $\deg(x_i) = \delta_i > 0$ und $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subseteq P$ ein homogenes Ideal mit $f_1, \ldots, f_s \in P \setminus \{0\}$ homogen. Ferner sei σ eine Termordnung auf $\mathbb{T}^n$.

9.1 Bemerkung

Berechnet man die σ-Gröbnerbasis von I mittels des Buchberger-Algorithmus, so ist die berechnete Gröbnerbasis ebenfalls homogen, denn

1. Reduktionsschritte $f \mapsto f - ctg_i$ erhalten die Homogenität und den Grad
2. Die S-Polynome
$$S_{ij} = \frac{1}{c_i} \frac{\mathrm{kgV}(t_i, t_j)}{t_i} g_i - \frac{1}{c_j} \frac{\mathrm{kgV}(t_i, t_j)}{t_j} g_j$$
sind homogen, denn
$$\mathrm{LT}_\sigma \left(\frac{\mathrm{kgV}(t_i, t_j)}{t_i} g_i \right) = \mathrm{kgV}(t_i, t_j) = \mathrm{LT}_\sigma \left(\frac{\mathrm{kgV}(t_i, t_j)}{t_j} g_j \right)$$
3. $g_{s'} = S'_{ij} = \mathrm{NR}_{\sigma, J}(S_{ij})$ ist dann ebenfalls wieder homogen.

Ferner beachte, dass $\deg(g_{s'}) = \deg(S_{ij}) \geq \max\{\deg(g_i), \deg(g_j)\}$ gilt mit $>$ falls $t_i \nmid t_j$ und $t_j \nmid t_i$.

9.2 Theorem (Homogener Buchberger-Algorithmus)

In obiger Situation betrachte die folgenden Instruktionen:

(1) Sei $B = \emptyset$, $F = (f_1, \ldots, f_s)$, $G = \emptyset$ und $s' = 0$.

(2) Sei d der kleinste Grad eines Elements von F oder eines Polynoms S_{ij} mit $(i, j) = B$. Bilde die Mengen
$$F_d = \{f_i \in F \mid \deg(f_i) = d\} \quad \text{bzw.} \quad B_d = \{(i, j) \in B \mid \deg(S_{ij}) = d\}$$
und streiche sie aus F bzw. B.

(3) Ist $B_{:d} = \emptyset$, so fahre mit (6) fort. Andernfalls wähle ein Paar $(i, j) \in B_d$ und streiche es aus B_d.

(4) Berechne S_{ij} und $S'_{ij} = \mathrm{NR}_{\sigma, G}(S_{ij})$. Gilt $S'_{ij} = 0$, so fahre mit (3) fort.

(5) Erhöhe s' um Eins, füge $g_{s'} = S'_{ij}$ zu G hinzu, füge $\{(i, s') \mid 1 \leq i < s'\}$ zu B hinzu und fahre mit (3) fort.

(6) Ist $F_d = \emptyset$, so fahre mit (9) fort. Andernfalls wähle $f \in F_d$ und streiche es.

(7) Berechne $f' = \mathrm{NR}_{\sigma, G}(f)$. Ist $f' = 0$, so fahre mit (6) fort.

(8) Erhöhe s' um Eins. füge $g_{s'} = f'$ zu G hinzu, füge $\{(i, s') \mid 1 \leq i \leq s'\}$ zu B hinzu und fahre mit (6) fort.

(9) Ist $B = \emptyset$ und $F = \emptyset$, so gib G aus und stoppe. Andernfalls fahre mit (2) fort.

Dies ist ein Algorithmus, der eine homogene σ-Gröbnerbasis $G = (g_1, \ldots, g_{s'})$ von I "Grad für Grad" berechnet.

Beweis:

Endlichkeit: Es ist nun z.z. dass B in (5) nur endlich oft vergrößert wird. Es gilt stets $\langle \mathrm{LT}_\sigma (G) \rangle \subseteq \mathrm{LT}_\sigma (I)$ und $\mathrm{LT}_\sigma (g_{s'}) \notin \langle \mathrm{LT}_\sigma (g_1), \ldots, \mathrm{LT}_\sigma (g_{s'-1}) \rangle$. Die Endlichkeit der Kette

$$\langle \mathrm{LT}_\sigma (g_1) \rangle \subsetneqq \langle \mathrm{LT}_\sigma (g_1), \mathrm{LT}_\sigma (g_2) \rangle \subsetneqq \ldots$$

folgt aus Dicksons Lemma.

Korrektheit: Irgendwann werden alle f_i in (6) − (9) abgearbeitet. Dann gilt $\langle g_1, \ldots, g_{s'} \rangle = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle = I$ (Induktion nach s'). Alle Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq s'$ werden irgendwann betrachtet und mit dem endgültigen G gilt $S_{ij} \xrightarrow{G} 0$. Nach dem Buchberger-Kriterium ist das endgültige G also ein σ-Gröbnerbasis von I. □

Ziel: Wir wollen die Kenntnis von $\mathrm{HS}_I (z)$ verwenden um diesen Algorithmus zu optimieren.

9.3 Lemma

Seien $(0) \neq J \subseteq I \neq \{0\}$ zwei homogene Ideale. Es gebe ein j mit $J_i = I_i$ für $i < j$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) $J_j \subsetneqq I_j$

(b) $\dim_K (I_j) - \dim_K (J_j) > 0$

(c) Es gibt ein $c_J > 0$ mit $\mathrm{HN}_{P/I} (z) - \mathrm{HN}_{P/J} (z) = -c_j z^j +$ Terme höheren Grades. In diesem Fall ist $c_j = \dim (I_j) - \dim (J_j)$.

Beweis:

Zu "$(a) \Leftrightarrow (b)$": klar.

Zu "$(b) \Leftrightarrow (c)$": Schreibe

$$\mathrm{HS}_{P/I} (z) = \frac{\mathrm{HN}_{P/I} (z)}{(1 - z^{\delta_1}) \ldots (1 - z^{\delta_n})} \quad \text{und} \quad \mathrm{HS}_{P/J} (z) = \frac{\mathrm{HN}_{P/J} (z)}{(1 - z^{\delta_1}) \ldots (1 - z^{\delta_n})}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} \big(\mathrm{HF}_{P/I} (i) - \mathrm{HF}_{P/J} (i)\big) z^i &= \mathrm{HS}_{P/I} (z) - \mathrm{HS}_{P/J} (z) \\ &= \frac{1}{(1 - z^{\delta_1}) \ldots (1 - z^{\delta_d})} \left[\mathrm{HN}_{P/I} (z) - \mathrm{HN}_{P/J} (z)\right] \end{aligned}$$

Damit folgt nach Voraussetzung (da $\sum_{i<j} \big(\mathrm{HF}_{P/I} (i) - \mathrm{HF}_{P/J} (i)\big) = 0$):

$$\underbrace{\left[\sum_{i \geq j} \big(\mathrm{HF}_{P/I} (i) - \mathrm{HF}_{P/J} (i)\big)\right] \prod_k \left(1 - z^{\delta_k}\right)}_{= -c_j z^j + \text{Terme höheren Grades}} = \mathrm{HN}_{P/I} (z) - \mathrm{HN}_{P/J} (z)$$

Damit folgt die Behauptung. □

9.4 Lemma

Angenommen, bei der Berechnung einer homogenen σ-Gröbnerbasis von I mittels Theorem 9.2 ist Grad d gerade beendet worden. Dann berechnen wir den Hilbert-Zähler von $J = \langle \mathrm{LT}_\sigma(G) \rangle$. Das Ergebnis sei

$$\mathrm{HN}_{P/I}(z) - \mathrm{HN}_{P/J}(z) = -c_j z^j + (\text{Terme höheren Grades})$$

Dann gilt:

(a) $J_i = \mathrm{LT}_\sigma(I_i)_i$ für $i < j$

(b) $j > d$

(c) In den Graden $d+1, \ldots, j-1$ findet der Algorithmus von Theorem 9.2 weder in Schritt (5) noch in Schritt (8) neue σ-Gröbnerbasiselemente von I.

(d) Es gilt $c_j \leq \#B_j + \#F_j$ und der Algorithmus von Theorem 9.2 findet genau c_j neue σ-Gröbnerbasiselemente im Grad j.

Beweis:
Zu (a): Schreibe

$$\mathrm{HS}_{P/I}(z) = \frac{\mathrm{HN}_{P/I}(z)}{\prod_k (1 - z^{\delta_k})} \quad \text{und} \quad \mathrm{HS}_{P/J}(z) = \frac{\mathrm{HN}_J(z)}{\prod_k (1 - z^{\delta_k})}$$

Dann gilt:

$$\sum_{i \geq 0} \left[\mathrm{HF}_{P/I}(i) - \mathrm{HF}_{P/J}(I)\right] z^i = \frac{1}{\prod_k (1 - z^{\delta_k})} \left[-c_j z^j + \text{Terme höheren Grades}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i \geq 0} \left(\mathrm{HF}_{P/I}(i) - \mathrm{HF}_{P/J}(i)\right) z^i\right] \underbrace{\prod_k (1 - \delta^k)}_{1+\text{höhere Terme}} = -c_j z^j + \text{Terme höheren Grades}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$\mathrm{HF}_{P/I}(i) = \mathrm{HF}_{P/J}(i) \quad \text{für } i < j$$

Für $i < j$ gilt:

$$\mathrm{HF}_{\mathrm{LT}_\sigma(I)}(i) \overset{(1)}{=} \mathrm{HF}_I(i) \overset{(2)}{=} \mathrm{HF}_J(i) \quad \text{für } i < j$$

Zu (1): Nach dem Basissatz von Macauley. Zu (2): Nach (a). Damit folgt:

$$J_i = \langle \mathrm{LT}_\sigma(G) \rangle_i \subseteq \mathrm{LT}_\sigma(I)$$

ist eine Gleichheit.
Zu (b): Bei der Berechnung einer σ-Gröbnerbasis von I mittels Algorithmus von Theorem 9.2 werden im weiteren Verlauf nur noch Elemente vom Grad $> d$ zu G hinzugefügt. Für das aktuelle G gilt also:

$$\langle \mathrm{LT}_\sigma(G) \rangle_i = \mathrm{LT}_\sigma(I)_i \quad \text{für } i \leq d$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$J_j = \langle \mathrm{LT}_\sigma(G) \rangle \subsetneqq \mathrm{LT}_\sigma(I)_j$$

und nach (a) gilt:

$$J_i = \langle \mathrm{LT}_\sigma(G) \rangle_i = \mathrm{LT}_\sigma(I)_i \quad \text{für } i < j$$

und damit folgt $j > d$.

Zu (c): Für die Grade $i \in \{d+1, \ldots, j-1\}$ gilt nach (a) bereits

$$J_i = \langle \mathrm{LT}_\sigma(G) \rangle_i = \mathrm{LT}_\sigma(I)_i$$

Also kann der Algorithmus im Grad i kein neues σ-Gröbnerbasiselement von I finden.

Zu (d): Es gilt $\mathrm{HF}_{\mathrm{LT}_\sigma}(j) - \mathrm{HF}_J(j) = c_j$. Also gibt es genau c_j K-lineare unabhängige Leitterme in $\mathrm{LT}_\sigma(I)_j / J_j$. Also findet der Algorithmus genau c_j neue σ-Gröbnerbasiselemente von I in Grad j. □

9.5 Satz (Der Hilbert-gesteuerte Buchberger-Algorithmus)

Im Algorithmus von Theorem 9.2 nehme an, dass $\mathrm{HN}_{P/I}(z)$ bekannt ist. Ersetze die Schritte (2), (3) und (6) wie folgt:

- $(2')$ Sei $J = \langle \mathrm{LT}_\sigma(G) \rangle$. Berechne das Polynom $\mathrm{HN}_{P/I}(z) - \mathrm{HN}_{P/J}(z)$. Ist es Null, so gibt G aus und stoppe. Andernfalls sei d so, dass

  $$\mathrm{HN}_{P/I}(z) - \mathrm{HN}_{P/J}(z) = -c_d z^d + \text{Terme höheren Grades}$$

  gilt mit $c_d > 0$. Bilde B_d und F_d und streiche ihre Elemente aus B bzw. F.

- $(3')$ Ist $B_d = \emptyset$ oder enthält G bereits c_d Elemente vom Grad d, so fahre mit Schritt $(6')$ fort. Andernfalls wähle $(i,j) \in B_d$ und streiche es.

- $(6')$ Ist $F_d = \emptyset$ oder enthält G_d bereits c_d Elemente vom Grad d, so fahre mit (9) fort. Andernfalls wähle $f \in F$ und streiche es.

Der resultierende Algorithmus berechnet eine homogene σ-Gröbnerbasis von I.

Beweis: Dies folgt sofort aus Theorem 9.2 und Lemma 9.4. □

Der Algorithmus von Satz 9.5 heißt der **Hilbert-gesteuerte Buchberger-Algorithmus**.

9.6 Bemerkung

Analog wie in Satz 9.5 kann man auch die Lineare-Algebra-Methode aus Satz 4.4 zur Berechnung der fundamentalen Invarianten Hilbert-steuern. Die Hilbert-Reihe $\mathrm{HS}_{P^G}(z)$ kennt man dabei aus Moliens Formel. Für $A = K[f_1, \ldots, f_s] \subseteq P^G$ berechnet man $\mathrm{HS}_A(z)$ wie in §8.