Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 26.10.2006, 10.15h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

WS 2006/07 Übungsblatt 1

Aufgabe 1 Noch mehr Mengenleere

a) Beweisen Sie eine der folgenden Mengenformeln!
   i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   Machen Sie sich zunächst die Richtigkeit beider Gleichungen durch das Zeichnen von Mengendiagrammen klar!

b) Beweisen Sie folgende Eigenschaft von Mengen!
   Wenn $A \cap B = \emptyset$ ist, dann folgt $A \setminus B = A$.
   Was gilt für $B \setminus A$?

Aufgabe 2 „Das folgt mit Induktion und ist o. B. d. A. trivial!" ☺

a) Sei M eine endliche Menge mit n Elementen, $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen sie durch vollständige Induktion: Die Anzahl aller Abbildungen von $M \to \{0, 1\}$ ist 2^n!

b) Lösen Sie $(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1) : (x - 1)$ und beweisen Sie ihr Ergebnis durch Induktion!

Aufgabe 3 Secret Sharing

Der Vorstand einer großen Firma sichert wichtige Unterlagen in einem Tresor, der nur mit Hilfe einer geeigneten Zahlenkombination zu öffnen ist, die regelmäßig vom Vorstandsvorsitzenden geändert wird. Die Kenntnis über diesen Code gibt er an die anderen Vorstandsmitglieder aber nur anteilig verschlüsselt weiter, so dass beispielsweise in a) mindestens drei Vorstandsmitglieder mit ihren Kenntnissen zusammenkommen müssen, um damit den Code zu entschlüsseln. Ein solches Verfahren nennt man secret sharing.

a) Der Vorsitzende gibt allen Vorstandsmitgliedern eine Geheimnisgerade g an:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

   Zusätzlich weist er seinen fünf Vorstandskollegen jeweils einen Punkt zu: $A(0 \mid -3 \mid -1)$, $B(4 \mid 2 \mid 0)$, $C(1 \mid -1 \mid -1)$, $D(-1 \mid 1 \mid -3)$ und $E(-2 \mid 2 \mid -4)$. Er teilt ihnen mit, dass diese fünf Punkte in der Geheimnisebene liegen.

   i) Die Mitglieder mit den Punkten A, B und C wollen den Tresor öffenen. Sie wissen, dass der Code aus den Koordinaten des Schnittpunktes der Geheimnisgeraden mit der Geheimnisebene besteht. Bestimmen Sie den Schnittpunkt!
   ii) Dieselben Herren wollen ein anderes Mal den Tresor öffen. Dazu müssen Sie die ersten drei Ziffern des Schnittwinkels der Geheimnisgeraden mit der Geheimnisebene kennen. Bestimmen Sie die ersten drei Ziffern des Schnittwinkels!
   iii) Die Mitglieder mit C, D und E wollen zur Tresoröffnung den Schnittpunkt ihrer Geheimnisebene mit der Geheimnisgerade bestimmen. Dass sie daran scheitern, liegt an einem unbeabsichtigten Fehler des Vorsitzenden. Welchen Fehler hat er gemacht?

b) Der Vorstand wird um eine Frau erweitert. Den Männern weist der Vorsitzende die unter a) genannten Punkte A bis D und ein korrigiertes E zu, so dass jeweils drei die Geheimnisebene bestimmen können. Der Frau weist er $F(10 \mid 1 \mid 1)$ zu. F liegt nicht in der Geheimnisebene. Bei der Tresoröffnung muss jetzt immer die Frau dabei sein, weil der Code aus den ersten drei Ziffern des Abstandes von F zur Geheimnisebene besteht. Bestimmen Sie die ersten drei Ziffern des Abstandes!

Aufabe 4 Wirrjektiv und Sturjektiv

Seien $f : B \to C$ und $g : A \to B$ Abbildungen. Beweisen Sie folgende zwei Aussagen!

a) Sind f und g injektiv, dann ist auch $f \circ g$ injektiv.

b) Sind f und g surjektiv, dann ist auch $f \circ g$ surjektiv.

Die Abbildungen in a) müssen dabei nicht surjektiv sein, die in b) nicht injektiv.

Aufgabe 5 Der Junge mit der Mundharmonika

Zwei Cowboys treiben gemeinsam ihre x Kühe in die Stadt und verkaufen sie zu je x Dollar. Für den Erlös erwerben sie eine ungerade Anzahl von Schafen zu je 12 Dollar und der Rest reicht gerade noch für ein Lamm. Dem Cowboy, der beim Teilen das Lamm erhält, schenkt der andere zum Ausgleich seine Mundharmonika. Was kostet die Mundharmonika?
Hinweis: Dividiert man das Quadrat einer ganzen Zahl durch 12, kann man nur die Reste 0, 1, 4 und 9 erhalten, bei der Divisien durch 8 nur die Reste 0, 1 und 4.