Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 25.01.2007, 10.15 h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

WS 2006/07 Übungsblatt 12

Aufgabe 1 Der erweiterte euklidische Algorithmus

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Betrachte die folgenden Instruktionen:

1) Ist $a = b = 0$, so gib das Tripel $(0, 0, 0)$ aus und stoppe.
2) Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, so gib das Tripel $(0, \frac{|b|}{b}, |b|)$ aus und stoppe.
3) Ist $a \neq 0$ und $b = 0$, so gib das Tripel $(\frac{|a|}{a}, 0, |a|)$ aus und stoppe.
4) Bilde die Tripel $(c_0, d_0, e_0) = (\frac{|a|}{a}, 0, |a|)$ und $(c_1, d_1, e_1) = (0, \frac{|b|}{b}, |b|)$.
5) Prüfe, ob $e_1 \leq e_0$ gilt. Falls nicht, vertausche (c_0, d_0, e_0) und (c_1, d_1, e_1) miteinander.
6) Berechne eine Darstellung $e_0 = qe_1 + r$ mit $q \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < e_1$.
7) Ist $r = 0$, so gib (c_1, d_1, e_1) aus und stoppe.
8) Bilde $(c_2, d_2, e_2) = (c_0 - qc_1, d_0 - qd_1, r)$.
9) Ersetze (c_0, d_0, e_0) durch (c_1, d_1, e_1) und (c_1, d_1, e_1) durch (c_2, d_2, e_2) und fahre mit 6) fort.

Zeigen Sie, dass der erweiterte euklidische Algorithmus nach endlich vielen Schritten stoppt und ein Tripel $(c, d, e) \in \mathbb{Z}^3$ berechnet, so dass $e = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $ac + bd = e$ gilt!

Aufgabe 2 In der Kürze liegt die Würze!

a) Zeigen Sie das folgende **Lemma von Bezout**: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $g = \mathrm{ggT}(a, b)$. Dann gibt es Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $g = s \cdot a + t \cdot b$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremde Zahlen. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x \cdot a^2 + y \cdot b = a - 1$ eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ hat!

Aufabe 3 Und weil nur das unendlich Endliche mich interessieren kann...

Setzt man in ein Polynom $f \in K[x]$ ein Element $a \in K$ ein, so erhält man den Wert $f(a) \in K$ von f an der Stelle a. Diese Zuordnung $a \mapsto f(a)$ ist eine Abbildung von K nach K und heißt die von f induzierte **Polynomfunktion**. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : K[x] \to \mathrm{Abb}(K, K)$, die jedem Polynom ihre Polynomfunktion zuordnet, genau dann injektiv ist, wenn $\#K = \infty$.

Aufgabe 4 Was ist höhere Mathematik? Wenn man morgens mit einer Unbekannten aufwacht!

a) Beschreiben Sie den kleinsten $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{Q}[x]$, der die Polynome $f = 3x^2 + 1$, $g = -5x^2 - 5$ und $h = x^2 - 2$ enthält!

b) Zeigen Sie, dass $\varphi : \{\, ax^2 + bx^3 \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\} \to \mathbb{Q}[x],\ ax^2 + bx^3 \mapsto (a + 2b)(x + 1)$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung darstellt! Beschreiben Sie $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$!

Aufgabe 5 „Glauben Sie an Gott?“ „Ja, bis auf einen Isomorphismus!“

Finden Sie eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{Q}^3$ mit $\psi(1) = (4, 0, 0)$, $\psi(x) = (0, 2, 0)$ und $\psi(x^2) = (0, 6, 1)$. Zeigen Sie, dass ψ eindeutig bestimmt ist und einen Isomorphismus von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen darstellt!