Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 03.04.2007, 10.15 h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

WS 2006/07 Übungsblatt 14

Aufgabe 1 Nehmen Sie die Spur auf!

Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ definiert man (siehe Vorlesung) die Spur von A durch $\mathrm{tr}(A) := a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

a) Zeigen Sie, dass $tr : \mathrm{Mat}_n(K) \to K,\ A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ eine K-lineare Abbildung ist!

b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
   i) $\mathrm{tr}(A) \cdot \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(AB)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$
   ii) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$
   iii) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$
   iv) $\mathrm{tr}(A^{-1}) = (\mathrm{tr}(A))^{-1}$ für alle $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $\mathrm{tr}(A) \neq 0$
   v) Wenn A ähnlich zu B ist, dann folgt $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Aufgabe 2 Vorsprung ist die Basis aller Erfolge!

Gegeben sei der $\mathbb{Q}$-Endomorphismus $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ mit

$$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 9 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie es eine Basis B von $\mathbb{Q}^3$ an, so dass $M_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist!

Aufabe 3 Unfortunately, no one can be told what the Matrix is. You have to see it for yourself.

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 4 Was Eigen, das ist Eigen!

Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Zeigen Sie, dass A^{-1} genau die Eigenwerte $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_r^{-1}$ besitzt!

Aufgabe 5 Mäuse, versteckt euch!

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ heißt stochastische Matrix, falls alle Einträge nicht negativ sind und in jeder Spalte die Koeffizientensumme 1 beträgt.

In der Kinderuni entwickeln die Teilnehmer für die Homepage der Universität Dortmund ein „Mäuseversteckspiel“. Um Mitternacht tummeln sich 1000 Mäuse im Mathetower, 5000 in der Mensa und 3000 im Hörsaalgebäude. Die Anzahl der Homepagebesucher wird jeden Tag ab Mitternacht neu gezählt. Jeder Besucher verursacht einen schnellen Mäuseumzug:

Mäuseanzahl nach	0 Besuchen	1 Besuch	2 Besuchen	3 Besuchen
im Mathetower	1000	4300	3910	4015
in der Mensa	5000	2600	3080	2984
im Hörsaalgebäude	3000	2100	2010	2001

a) Bestimmen Sie die stochastische Matrix U, die diese Umzüge beschreibt! Falls Sie U nicht bestimmen können, arbeiten Sie bitte weiter mit

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

b) Wie verstecken sich die Mäuse nach 5 Homepagebesuchen?

c) Bestimmen Sie die stationäre Mäuseverteilung!

d) Bestimmen Sie die Eigenvektoren zu den von 1 verschiedenen Eigenwerten von U!
Beweisen Sie allgemein, dass für stochastische $(n \times n)$-Matrizen die Spaltensummen aller Eigenvektoren zu von 1 verschiedenen Eigenwerten 0 sind!

e) Die Schülerin möchte als stationäre Mäuseverteilung erreichen, dass sich 4000 Mäuse im Mathetower, 4000 in der Mensa und 1000 im Hörsaalgebäude verstecken. Geben Sie konkret eine stochastische Matrix P an, die dies erfüllt!

Aufgabe 6 Eine Klasse für sich
Beweisen Sie die universelle Eigenschaft des Restklassenvektorraums (vgl. Satz 16.8 b))!

Aufgabe 7 Wenn alles Andere fehlschlägt, lesen Sie die Bedienungsanleitung...
Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 zwei K-Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass durch die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} f : U_1 \cap U_2 & \to & U_1 \oplus U_2 \\ u & \mapsto & (u, -u) \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} g : U_1 \oplus U_2 & \to & U_1 + U_2 \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U_1 \cap U_2 \xrightarrow{f} U_1 \oplus U_2 \xrightarrow{g} U_1 + U_2 \longrightarrow 0$$

von Vektorräumen definiert wird!

Aufgabe 8 Ein Mathematiker ist ein Gerät, das Kaffee in Beweise umwandelt.
Beweisen Sie Teil b) des Fünferlemmas (vgl. Satz 17.7)!

Aufgabe 9 Beweis durch Delegation...
Sei K ein Körper und seien V, W zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathrm{Hom}_K(V, W) & \to & \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*) \\ f & \mapsto & f^* \end{array}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen gegeben ist!

Aufgabe 10 Eine falsche Schlange
Beweisen Sie das folgende **Schlangenlemma**:
Sei K ein Körper. Gegeben sei ein Diagramm von Vektorräumen und K-linearen Abbildungen der Form

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & V_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] & V_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r, "h_1"] & W_2 \arrow[r, "h_2"] & W_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dabei seien die Zeilen exakt und die beiden Quadrate kommutativ. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz von K-Vektorräumen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Kern}(f_1) \longrightarrow \mathrm{Kern}(f_2) \longrightarrow \mathrm{Kern}(f_3) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Kokern}(f_1) \longrightarrow \mathrm{Kokern}(f_2) \longrightarrow \mathrm{Kokern}(f_3) \longrightarrow 0$$

gibt. Hierbei ist der <u>verbindende Homomorphismus</u> ∂ wie folgt definiert: zu $v_3 \in \mathrm{Kern}(f_3)$ wähle $v_2 \in g_2^{-1}(v_3)$ beliebig. Dann gibt es ein $w_1 \in W_1$ mit $h_1(w_1) = f_2(v_2)$. Setze $\partial(v_3) = \overline{w_1}$.
Skizze:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\color{red}{0} \arrow[r, dashed, red] & \mathrm{Kern}\,(f_1) \arrow[r, dashed, red] \arrow[d] & \mathrm{Kern}\,(f_2) \arrow[r, dashed, red] \arrow[d] & \mathrm{Kern}\,(f_3) \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, red, bend left] & \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & V_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"'] & V_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & W_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d] & W_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathrm{Kokern}\,(f_1) \arrow[r, dashed, red] \arrow[d] & \mathrm{Kokern}\,(f_2) \arrow[r, dashed, red] \arrow[d] & \mathrm{Kokern}\,(f_3) \arrow[r, dashed, red] \arrow[d] & \color{red}{0} \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Die Schlange!

Diese Aufgaben dienen zur Wiederholung und Vertiefung des in den letzten 2 Wochen behandelten Vorlesungsstoffes. Bei richtiger Bearbeitung erhält man Zusatzpunkte für das kommende Semester. Mit Aufgabe 10 kann man bis zu 12 Punkte erreichen.