Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 16.11.2006, 10.15 h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

WS 2006/07 Übungsblatt 4

Aufgabe 1 Kein Kreuz mit dem Kreuzprodukt

In der Physik, z. B. bei der Beschreibung von Drehbewegungen, wird ein weiteres Produkt zwischen Vektoren benötigt. Für Tupel $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das **Kreuzprodukt** durch

$$x \times y := (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) .$$

a) Finden Sie Tupel x, y, z für die das Kreuzprodukt nicht assoziativ ist!

b) Zeigen Sie, dass es für das Kreuzprodukt kein Einselement gibt!

c) Zeigen Sie: $\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \sin \alpha$, wobei α der Winkel zwischen x und y ist.
Tipp: Rechnen Sie zunächst $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$ nach!

Aufgabe 2 Neue Räume braucht der Mathematiker

Es sei M eine nichtleere Menge, K ein Körper und $V := \mathrm{Abb}(M, K)$ die Menge aller Abbildungen von M nach K.

a) Definieren Sie Abbildungen $V \times V \to V$ und $K \times V \to V$, so dass V zu einem K-Vektorraum wird und weisen Sie die Vektorraumaxiome nach!

b) Sie $m \in M$ und $U := \{f \in \mathrm{Abb}(M, K) \mid f(m) = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 3 „Ich habe einen eindimensionalen Strich. Wie wird er zweidimensional?“ „Noch’n Strich!“

a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

über dem Körper $\mathbb{Q}$ einen $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{Q}^3$ darstellt! Beschreiben Sie $\mathbb{L}$ als die Menge der Vielfachen eines Vektors!

b) Finden Sie zwei verschiedene $\mathbb{Q}$-Untervektorräume $U \subsetneq \mathbb{Q}^3$ und $V \subsetneq \mathbb{Q}^3$ mit $U \cap V = \mathbb{L}$!

c) Lösen Sie obiges Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_2$.
Gibt es Unterräume U, V in $(\mathbb{F}_2)^3$ wie in b) ?

Aufabe 4 Wetten, dass...?

Eine Zahlenanordnung

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

mit $a_1, \ldots, a_{16} \in \mathbb{Q}$ heißt ein **magisches Quadrat**, wenn die Summe der Zeilen, der Spalten und der beiden Diagonalen jeweils die selbe Zahl ergibt.

a) Beweisen Sie, dass die Menge der magischen Quadrate $q = (a_1, \dots, a_{16})$ ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{16}$ ist!

b) Finden Sie ein magisches Quadrat q_1, in dem 12 Nullen und 4 Einsen vorkommen!

c) Finden Sie ein magisches Quadrat q_2, in dem nur paarweise verschiedene positive ganze Zahlen vorkommen!

d) Erklären Sie, wie man mit b) und c) zu jeder ganzen Zahl d ein magisches Quadrat $q \in \mathbb{Z}^{16}$ finden kann, dessen Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen gleich d sind!

e) Zeigen Sie, dass man bei einem magischen Quadrat auch verlangen kann, dass die vier Ecken sowie die vier mittleren Felder die gleiche Summe haben. Kann man weitere Bedingungen verlangen? Wie viele?

Aufgabe 5 Jede Medaille hat zwei Seiten

Sei V der von den Tupeln $v_1 = (\overline{3}, \overline{7}, \overline{8})$ und $v_2 = (\overline{4}, \overline{10}, \overline{2})$ erzeugte Unterraum von $(\mathbb{F}_{17})^3$ und sei U der von den Tupeln $u_1 = (\overline{10}, \overline{14}, \overline{12})$ und $u_2 = (\overline{10}, \overline{7}, \overline{1})$ erzeugte Unterraum von $(\mathbb{F}_{17})^3$. Zeigen Sie mit Hilfe von CoCoA, dass $U = V$ gilt!