Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 23.11.2006, 10.15 h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium
WS 2006/07 Übungsblatt 5

Aufgabe 1 Sag mir Deine Teilmengen und ich sag Dir, wer Du bist!
Sei M eine Menge. Betrachten Sie auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ als Addition die symmetrische Differenz, also $+ : \mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M),\ (X,Y) \mapsto X \bigtriangleup Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

a) Definieren Sie eine skalare Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{F}_2$, so dass $V := \mathfrak{P}(M)$ zu einem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum wird und weisen Sie die Vektorraumaxiome nach.

Sei im Folgenden M eine endliche Menge.

b) Geben Sie eine $\mathbb{F}_2$-Basis von V an! Welche Dimension hat V?
Gibt es eine $\mathbb{F}_2$-Basis von V, deren Elemente Teilmengen von M sind, die mindestens zwei Elemente besitzen?

c) Sei W die Menge aller Teilmengen von M, die eine gerade Anzahl von Elementen besitzen. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von V ist!

d) Sei X eine Teilmenge von M ungerader Kardinalität. Zeigen Sie, dass W zusammen mit X bereits ganz V erzeugt!

Aufgabe 2 Geiz ist geil
Jede der vier Investmentgesellschaften G_1, G_2, G_3, G_4 verkauft Anteilscheine. Mit dem Erwerb eines Anteilscheines wird der Käufer Miteigentümer der fünf Industriebetriebe A, B, C, D, E. Der Nennwert eines Anteilscheines ist 100 €. Der mit einem Anteilschein erworbene Gesamtbesitz teilt sich bei den einzelnen Gesellschaften folgendermaßen auf:

	G_1	G_2	G_3	G_4
A	20	40	10	20
B	30	10	10	18
C	10	10	15	12
D	25	20	40	30
E	15	20	25	20

Beurteilen Sie das Angebot von G_4, wenn sich der Verkaufspreis eines Anteilscheines in € nach folgender Tabelle bestimmt!

G_1	G_2	G_3	G_4
122	125	125	124,50

Aufabe 3 Sieben Fässer Wein können uns nicht gefährlich sein
Eine Winzergenossenschaft versendet ihren Wein nur in Kisten K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 mit folgender Zusammensetzung (Angaben in Flaschen):

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Tafelwein	156	168	48	36	36
Qualitätswein	120	132	36	24	36
Prädikatswein	72	84	24	12	24

Zeigen Sie, dass man jede Bestellung aus Kisten K_1, K_2, K_3 durch eine flaschenmäßig gleichwertige Lieferung aus Kisten K_3, K_4, K_5 ersetzen kann! Stellen Sie entsprechende Umrechnungsformeln auf!

Aufgabe 4 LU2LU

Es sei V ein K-Vektorraum. Weiter seien $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie:

a) Für $a_1, \ldots, a_n \in K \setminus \{0\}$ sind $a_1\vec{v_1}, \ldots, a_n\vec{v_n}$ wieder linear unabhängig.

b) Sei $\vec{w} := b_1\vec{v_1} + \ldots + b_i\vec{v_i} + \ldots + b_n\vec{v_n}$ mit $b_1, \ldots, b_n \in K$.
Zeigen Sie, dass $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_{i-1}}, \vec{w}, \vec{v_{i+1}}, \ldots, \vec{v_n}$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $b_i \neq 0$ gilt.

Aufgabe 5 Relaxen am Cocoa Beach

Untersuchen Sie mit Hilfe von CoCoA die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ auf lineare Abhängigkeit:

a) $(1, -2, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(7, -4, 1)$

b) $(1, -3, 7)$, $(2, 0, -6)$, $(3, -1, -1)$, $(2, 4, -5)$

c) $(1, 2, -3)$, $(1, -3, 2)$, $(2, -1, 5)$

d) $(-1, -1, -1)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$