Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 14.12.2006, 10.15 h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

WS 2006/07 Übungsblatt 8

Aufgabe 1 Bier her, Bier her, oder i fall um!

Eine Dortmunder Brauerei lieferte in den letzen drei Jahren folgende Biermengen (gemessen in „Mass") an ihre Absatzmärkte A, B, C, D :

2003	Pils:	1013 nach A, 714 nach B, 310 nach C, 282 nach D
	Lager:	612 nach A, 422 nach B, 201 nach C, 188 nach D
	Alt:	186 nach A, 88 nach B, 12 nach C, 24 nach D
2004	Pils:	1188 nach A, 512 nach B, 280 nach C, 344 nach D
	Lager:	711 nach A, 404 nach B, 161 nach C, 240 nach D
	Alt:	210 nach A, 72 nach B, 10 nach C, 21 nach D
2005	Pils:	1096 nach A, 719 nach B, 166 nach C, 302 nach D
	Lager:	667 nach A, 440 nach B, 108 nach C, 202 nach D
	Alt:	193 nach A, 66 nach B, 0 nach C, 16 nach D

a) Beschreiben Sie diese Daten mit geeigneten Matrizen. Wie groß war die durchschnittliche Absatzmenge pro Biersorte und Absatzmarkt? Finden Sie eine Matrizenoperation, die diese Frage beantwortet!

b) Pro Mass sei der Gewinn der Brauerei abhängig von den Transportkosten zum Absatzmarkt. Er beträgt 0,83 € für A, 0,91 € für B, 1,04 € für C und 0,69 € für D. Mit welcher Matrizenoperation kann man den durchschnittlichen Gesamtgewinn pro Biersorte und Absatzmarkt berechnen? Welche Anteile am Gesamtgewinn haben die drei Biersorten?

Aufgabe 2 InVerse Links

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeigen Sie : Gibt es eine Linksinverse zu A, d.h. gibt es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $B \cdot A = I_n$, so ist A invertierbar und $B = A^{-1}$!

Aufabe 3 Komposition = Zusammenfügung verschiedener Teile zu einem harmonischen Ganzen

Sei $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung mit

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Gibt es eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $g : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, so dass $f \circ g$ den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet?

b) Gibt es eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $h : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, so dass $h \circ f$ den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet?

Aufgabe 4 Auf diese Basen bin ich sauer!

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2, x_3, x_2 + x_3)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_C^B(f)$ von f bzgl. der Basen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, wobei

$$b_1 = (1, 1, 0),\ b_2 = (2, 1, 3) \text{ und } b_3 = (0, 1, 2)$$

$$c_1 = (1, 0, 1),\ c_2 = (1, 1, 1) \text{ und } c_3 = (0, 1, 1)!$$

Aufgabe 5 Was ist die Matrix?

Sie K ein Körper und sei $f : K^n \to K^m$ die durch die Matrix M gegebene K-lineare Abbildung. Bestimmen Sie mit Hilfe von CoCoA K-Basen von Kern(f) und von Bild(f)!

a)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie hierfür die Befehle `Interreduced` und `Syz`!