Lösungen zum Übungsblatt 2

Aufgabe 4:

(i) Wahrheitstafel:

$\alpha(F)$	$\alpha(G)$	$\alpha(F \Rightarrow G) \overset{2.3.b}{\equiv} \alpha(\neg F \vee G)$	$\alpha(F \Leftarrow G) \overset{2.3.b}{\equiv} \alpha(F \vee \neg G)$	$\alpha((F \Rightarrow G) \wedge (F \Leftarrow G))$	$\alpha(F \Leftrightarrow G)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Stimmen überein,
also sind die
Formeln äquivalent.

(ii) Über Satz 2.15 (Die fundamentalen Äquivalenzen der Aussagenlogik):

$$\begin{aligned}
((F \wedge \neg G) \vee H) \vee (G \wedge \neg H) &\overset{2.15.e)}{\equiv} ((F \vee H) \wedge (\neg G \vee H)) \vee (G \wedge \neg H) \\
&\overset{2.15.e)}{\equiv} ((F \vee H) \vee (G \wedge \neg H)) \wedge ((\neg G \vee H) \vee (G \wedge \neg H)) \\
&\overset{2.15.e)}{\equiv} [((F \vee H) \vee G) \wedge ((F \vee H) \vee \neg H)] \\
&\qquad \wedge [((\neg G \vee H) \vee G) \wedge ((\neg G \vee H) \vee \neg H)] \\
&\overset{2.15.h)}{\equiv} (F \vee H) \vee G \\
&\equiv F \vee H \vee G.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Wir verwenden Algorithmus 2.19 (Algorithmus zur Erzeugung einer KNF).

$$\begin{aligned}
\neg(A \Rightarrow (B \wedge \neg C)) \vee \neg(C \Rightarrow \neg A) &\underset{2.3.b)}{\overset{0)}{\equiv}} \neg(\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee \neg(\neg C \vee \neg A) \\
&\underset{2.15.g)}{\overset{3)}{\equiv}} (\neg\neg A \wedge \neg(B \wedge \neg C)) \vee (\neg\neg C \wedge \neg\neg A) \\
&\underset{2.15.f)}{\overset{1)}{\equiv}} (A \wedge \neg(B \wedge \neg C)) \vee (C \wedge A) \\
&\underset{2.15.g)}{\overset{2)}{\equiv}} (A \wedge (\neg B \vee \neg\neg C)) \vee (C \wedge A) \\
&\underset{2.15.f)}{\overset{1)}{\equiv}} (A \wedge (\neg B \vee C)) \vee (C \wedge A) \\
&\underset{2.15.e)}{\overset{5)}{\equiv}} [(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee C] \wedge [(A \wedge (\neg B \vee C)) \vee A] \\
&\underset{2.15.e)}{\overset{6)}{\equiv}} [(A \vee C) \wedge ((\neg B \vee C) \vee C)] \\
&\qquad \wedge [(A \vee A) \wedge ((\neg B \vee C) \vee A)] \\
&\underset{2.15.a)}{\equiv} (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge A \wedge (A \vee \neg B \vee C) \\
&\underset{2.15.d)}{\equiv} (\neg B \vee C) \wedge A \wedge (A \vee \neg B \vee C) \\
&\underset{2.15.d)}{\equiv} (\neg B \vee C) \wedge A.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6:

- Festlegung der Abkürzungen:

$$\begin{aligned} A &= \text{„Homer drückt den ersten Knopf"} \\ B &= \text{„Homer drückt den zweiten Knopf"} \\ C &= \text{„Homer drückt den dritten Knopf"} \end{aligned}$$

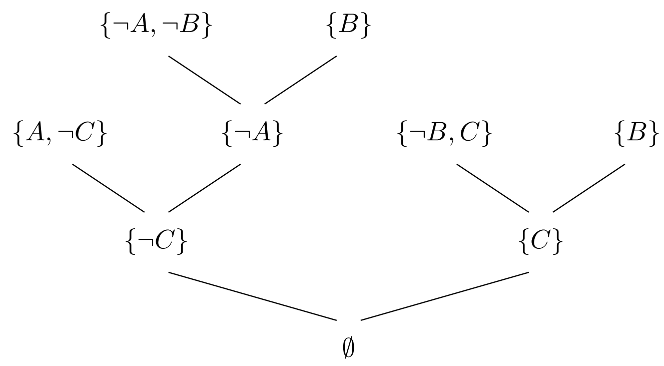
- Übersetzung der Aussagen:
  - „Drücken Sie niemals den ersten und den zweiten Knopf gemeinsam“:
  $$F_1 \;:=\; \neg(A \wedge B) \;\equiv\; (\neg A \vee \neg B)\,.$$
  - „Haben Sie den ersten oder den zweiten Knopf gedrückt, so muss auch der dritte Knopf gedrückt werden“:
  $$\begin{aligned} F_2 \;:=\; (A \vee B) \Rightarrow C &\equiv \neg(A \vee B) \vee C \\ &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee C \\ &\equiv (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)\,. \end{aligned}$$
  - „Entweder muss der erste Knopf gedrückt werden oder der dritte Knopf darf nicht gedrückt werden“:
  $$\begin{aligned} F_3 \;:=\; (A \Leftrightarrow \neg\neg C) &\equiv (A \Rightarrow C) \wedge (A \Leftarrow C) \\ &\equiv (\neg A \vee C) \wedge (A \vee \neg C)\,. \end{aligned}$$
  - Behauptung: „Lass’ bloß die Finger vom zweiten Knopf“:
  $$G \;:=\; \neg B.$$

- Unerfüllbarkeitsproblem:
  Es soll gezeigt werden, dass aus F immer G folgt, also, dass $F \Rightarrow G$ eine Tautologie ist. Nach Satz 2.10 („Eine Formel ist genau dann eine Tautologie, wenn ihre Negation unerfüllbar ist.“) zeigen wir die Unerfüllbarkeit von
  $$H \;:=\; \neg(F \Rightarrow G) \;\equiv\; \neg(\neg F \vee G) \;\equiv\; F \wedge \neg G.$$

- Resolutionskalkül (Algorithmus 2.33):
  $$\begin{aligned} H &\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge \neg\neg B \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge B. \end{aligned}$$
  1) Klauselmenge:
  $$\mathcal{K}(H) \;=\; \big\{ \{\neg A, \neg B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, C\}, \{A, \neg C\}, \{B\} \big\}.$$
  2) Resolutionen:
  $$\begin{aligned} \mathrm{Res}^1(\mathcal{K}(H)) &= \mathcal{K}(H) \cup \big\{ \{\neg B, \neg C\}, \{\neg A\}, \{A, \neg A\}, \\ &\qquad \{C, \neg C\}, \{\neg B, A\}, \{C\} \big\} \\ &\overset{\text{Bem. 2.29}}{=} \mathcal{K}(H) \cup \big\{ \{\neg B, \neg C\}, \{\neg A\}, \{\neg B, A\}, \{C\} \big\} \\ \mathrm{Res}^2(\mathcal{K}(H)) &= \mathrm{Res}^1(\mathcal{K}(H)) \cup \big\{ \{\neg B\}, \{\neg A, \neg B\}, \{C, \neg B\}, \{\neg B\}, \\ &\qquad \{\neg C\}, \{A\}, \{\neg C\}, \{A\}, \{\neg B\}, \{\neg B\} \big\} \\ &= \mathrm{Res}^1(\mathcal{K}(H)) \cup \big\{ \{\neg B\}, \{\neg C\}, \{A\} \big\} \\ \mathrm{Res}^3(\mathcal{K}(H)) &= \mathrm{Res}^2(\mathcal{K}(H)) \cup \big\{ \emptyset, \ldots \big\}. \end{aligned}$$

3) Da $\emptyset \in \mathrm{Res}^3(\mathcal{K}(H))$ ist H unerfüllbar, also ist $F \Rightarrow G$ eine Tautologie, d. h. Homer sollte die Finger vom zweiten Knopf lassen.

- Oder mittels graphischer Resolution:



- Zusatz: H ist eine Hornformel!
  Wir verwenden den Markierungsalgorithmus (3.7):

$$\mathcal{K}(H) \;=\; \big\{ \{\neg A, \neg B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, C\}, \{A, \neg C\}, \{B\} \big\}.$$

1. Schritt: Markiere B

$$\mathcal{K}(H) \;=\; \big\{ \{\neg A, \underline{\neg B}\}, \{\neg A, C\}, \{\underline{\neg B}, C\}, \{A, \neg C\}, \{\underline{B}\} \big\}$$

2. Schritt: Markiere C

$$\mathcal{K}(H) \;=\; \big\{ \{\neg A, \underline{\neg B}\}, \{\neg A, \underline{C}\}, \{\underline{\neg B}, \underline{C}\}, \{A, \underline{\neg C}\}, \{\underline{B}\} \big\}$$

3. Schritt: Markiere A

$$\mathcal{K}(H) \;=\; \big\{ \{\underline{\neg A}, \underline{\neg B}\}, \{\underline{\neg A}, \underline{C}\}, \{\underline{\neg B}, \underline{C}\}, \{\underline{A}, \underline{\neg C}\}, \{\underline{B}\} \big\}$$

Da die Zielklausel $\{\neg A, \neg B\}$ vollständig markiert ist, ist H unerfüllbar.