Lösung zu Aufgabe 24

1) Festlegung der Struktur:

$$\begin{aligned}
U &= \{\text{Alle Studenten an der UniDo}\}\\
\varphi(a) &: \{\emptyset\} \to U\\
&\quad \emptyset \mapsto \text{Logik–Übungsleiter}\\
\varphi(f)(x) &: U \to U\\
&\quad f(x) \mapsto y\\
\psi(P) &= \{x \in U \mid x \text{ ist ein Informatikstudent}\}\\
\psi(Q) &= \{x \in U \mid x \text{ trinkt gerne Glühwein}\}\\
\psi(R) &= \{x \in U \mid x \text{ hat eine Waffel am Stand der Party–AG gekauft}\}\\
\psi(S) &= \{x \in U \mid x \text{ geht zur Weihnachtsfeier}\}\\
\psi(T) &= \left\{(x,y) \in U^2 \mid x \text{ ist ein Kollege von } y\right\}\\
\xi &: \text{beliebig, da keine freien Variablen verwendet werden}
\end{aligned}$$

2) Übersetzung der Aussagen:

- „Ein Informatik–Student kommt nur dann zur Weihnachtsfeier, wenn ihn ein Kollege dahin begleitet“:
$$F_1 := \forall x : ((P(x) \wedge S(x)) \Rightarrow \exists y : (T(x,y) \wedge S(y)))\,.$$
- „Alle Informatik–Studenten, die gerne Glühwein trinken, haben sich eine Waffel am Stand der Party–AG gekauft und kommen zur Weihnachtsfeier“:
$$F_2 := \forall x : ((P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (R(x) \wedge S(x)))\,.$$
- „Alle Kollegen des Logik–Übungsleiters werden nicht zur Informatik–Weihnachtsfeier kommen [...]“:
$$F_3 := \forall x : (T(a,x) \Rightarrow \neg S(x))\,.$$
- „[...] der Logik–Übungsleiter [ist] kein Informatiker [...], wenn er gerne Glühwein trinkt“:
$$F_4 := (Q(a) \Rightarrow \neg P(a))\,.$$

3) Aufstellen der Formel:
Nach Satz 2.10 ist also die Unerfüllbarkeit von

$$\begin{aligned}
F &:= F_2 \wedge F_3 \wedge F_1 \wedge \neg F_4\\
&\equiv \forall x : ((P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (R(x) \wedge S(x))) \wedge \forall x : (T(a,x) \Rightarrow \neg S(x))\\
&\qquad \wedge \forall x : ((P(x) \wedge S(x)) \Rightarrow \exists y : (T(x,y) \wedge S(y))) \wedge \neg (Q(a) \Rightarrow \neg P(a))\,.
\end{aligned}$$

zu zeigen.

4) Matrixklauselform von F:

$$
\begin{aligned}
F &\overset{2.3.b)}{\equiv} \forall x : (\neg (P(x) \wedge Q(x)) \vee (R(x) \wedge S(x))) \wedge \forall x : (\neg T(a,x) \vee \neg S(x)) \\
&\qquad \wedge \forall x : (\neg (P(x) \wedge S(x)) \vee \exists y : (T(x,y) \wedge S(y))) \wedge \neg (\neg Q(a) \vee \neg P(a)) \\
&\underset{4.13.3), 9)}{\overset{2.15.g), f)}{\equiv}} \forall x : \exists y : \big[((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee (R(x) \wedge S(x))) \wedge (\neg T(a,x) \vee \neg S(x)) \\
&\qquad \wedge ((\neg P(x) \vee \neg S(x)) \vee (T(x,y) \wedge S(y))) \wedge Q(a) \wedge P(a) \big] \\
&\underset{4.21.1)}{\overset{2.15.e)}{\sim}} \forall x : \big[(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee S(x)) \\
&\qquad \wedge (\neg T(a,x) \vee \neg S(x)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg S(x) \vee T(x, f(x))) \\
&\qquad \wedge (\neg P(x) \vee \neg S(x) \vee S(f(x))) \wedge Q(a) \wedge P(a) \big]. \\
F^* &= (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee S(x)) \\
&\qquad \wedge (\neg T(a,x) \vee \neg S(x)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg S(x) \vee T(x, f(x))) \\
&\qquad \wedge (\neg P(x) \vee \neg S(x) \vee S(f(x))) \wedge Q(a) \wedge P(a). \\
\mathcal{K}(F^*) &= \big\{ \{\neg P(x), \neg Q(x), R(x)\}, \{\neg P(x), \neg Q(x), S(x)\}, \{\neg T(a,x), \neg S(x)\}, \\
&\quad \{\neg P(x), \neg S(x), T(x, f(x))\}, \{\neg P(x), \neg S(x), S(f(x))\}, \{Q(a)\}, \{P(a)\} \big\}
\end{aligned}
$$

5) Resolution: