Einige Gedanken zu Bemerkung 2.29

- Sei
$$F := (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)\,.$$
Dann liefert die **falsche** Resolution
$$\begin{tikzcd} \{A, B, \neg C\} \arrow[dr, dash] & & \{A, \neg B, C\} \arrow[dl, dash] \\ & \{A\} & \end{tikzcd}$$
eine nicht aussagenäquivalente Klauselmenge $\mathcal{K}(F') = \mathcal{K}(F) \cup \{A\}$.
Angenommen $F' = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge A$ sei eine zu $\mathcal{K}(F')$ passende KNF. Dann gilt:

$\alpha(A)$	$\alpha(B)$	$\alpha(C)$	$\alpha(A \vee B \vee \neg C)$	$\alpha(A \vee \neg B \vee C)$	$\alpha(F)$	$\alpha(F')$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Sei jedoch G eine zu der richtigen Resolventenmenge
$$\mathrm{Res}^1(F) = \{\{A, B, \neg C\}, \{A, \neg B, C\}, \{A, C, \neg C\}, \{A, B, \neg B\}\}$$
passende Formel, z.B.
$$G = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee C \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg B)\,.$$
Dann gilt:

$\alpha(A)$	$\alpha(B)$	$\alpha(C)$	$\alpha(A \vee B \vee \neg C)$	$\alpha(A \vee \neg B \vee C)$	$\alpha(A \vee C \vee \neg C)$	$\alpha(A \vee B \vee \neg B)$	$\alpha(G)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Folglich sind $\mathcal{K}(F)$ und $\mathcal{K}(F')$ nicht äquivalent, $\mathcal{K}(F)$ und $\mathcal{K}(G)$ jedoch schon.

- Man sieht am obigen Beispiel, dass die Tautologien (hier $\{A, B, \neg B\}, \{A, C, \neg C\}$) nach Satz 2.15.h) (Die fundamentalen Äquivalenzen der Aussagenlogik: Tautologieregeln) keine Rolle spielen, denn es gilt:
$$\begin{aligned} G &= (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee C \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg B) \\ &\overset{2.15.h)}{\equiv} (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \\ &= F. \end{aligned}$$
Deshalb streichen wir diejenigen Klauseln aus der Klauselmenge, welche Tautologien entsprechen.