# Charakterisierung und Existenz von Gröbnerbasen

Jan Brandt

29. Januar 2007

## 8.1 Charakterisierung von Gröbnerbasen

Für eine Menge von Elementen $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq P\setminus\{0\}$, welche ein Ideal $I = \langle g_1, \ldots, g_s\rangle \subseteq P$ erzeugen, sei $\xrightarrow{G}$ die Ersetzungsregel definiert durch $G$, sei $\mathcal{G}$ das Tupel $(g_1, \ldots, g_s)$, sei $\lambda$ die Abbildung $\lambda : P^s \mapsto P$ definiert durch $\epsilon_i \mapsto g_i$ und sei $\Lambda : P^s \mapsto P$ die Abbildung definiert durch $\epsilon_i \mapsto LM_\sigma(g_i)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

$A_1$) Für jedes Element $m \in I\setminus\{0\}$ gibt es $f_1, \ldots, f_s \in P$, so dass $m$ dargestellt werden kann als $m = \sum_{i=1}^{s} f_i g_i$ und $\mathrm{LT}_\sigma(m) \geq_\sigma \mathrm{LT}_\sigma(f_i g_i)$ für alle $i = 1, \ldots, s$, so dass $f_i g_i \neq 0$, d.h. so dass $\mathrm{LT}_\sigma(m) \geq_\sigma \deg_{\sigma,\mathcal{G}}\left(\sum_{i=1}^{s} f_i \epsilon_i\right)$

$A_2$) Für jedes Element $m \in I\setminus\{0\}$ gibt es $f_1, \ldots, f_s \in P$, so dass $m = \sum_{i=1}^{s} f_i g_i$ und $\mathrm{LT}_\sigma(m) = \max_\sigma\{\mathrm{LT}_\sigma(f_i g_i) | i \in \{1, \ldots, s\}, f_i g_i \neq 0\}$, d.h. so dass $\mathrm{LT}_\sigma(m) = \deg_{\sigma,\mathcal{G}}\left(\sum_{i=1}^{s} f_i \epsilon_i\right)$

$B_1$) Die Menge $\{\mathrm{LT}_\sigma(g_1), \ldots, \mathrm{LT}_\sigma(g_s)\}$ erzeugt den $\mathbb{T}^n$-Monomodul $\mathrm{LT}_\sigma\{I\}$.

$B_2$) Die Menge $\{\mathrm{LT}_\sigma(g_1), \ldots, \mathrm{LT}_\sigma(g_s)\}$ erzeugt das Ideal $\mathrm{LT}_\sigma(I)$ von $P$.

$C_1$) Für ein Element $m \in P$ gilt $m \xrightarrow{G} 0$ genau dann, wenn $m \in I$.

$C_2$) Wenn $m \in I$ bezüglich $\xrightarrow{G}$ irreduzibel ist, dann gilt $m = 0$.

$C_3$) Für jedes Element $m_1 \in P$ gibt es ein eindeutiges Element $m_2 \in P$, so dass $m_1 \xrightarrow{G} m_2$ und $m_2$ irreduzibel bezüglich $\xrightarrow{G}$ ist.

$C_4$) Wenn $m_1, m_2, m_3 \in P, m_1 \xrightarrow{G} m_2$ und $m_1 \xrightarrow{G} m_3$ erfüllen, dann gibt es ein Element $m_4 \in P$, so dass $m_2 \xrightarrow{G} m_4$ und $m_3 \xrightarrow{G} m_4$.

$D_1$) Jedes homogene Element aus $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ hat eine Liftung in $\mathrm{Syz}(\mathcal{G})$.

$D_2$) Es existiert ein homogenes Erzeugendensystem von $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$, bestehend ausschlieich aus Elementen, die eine Liftung in $\mathrm{Syz}(\mathcal{G})$ haben.

$D_3$) Es existiert ein endliches homogenes Erzeugendensystem von $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$, bestehend ausschlieich aus Elementen, die eine Liftung in $\mathrm{Syz}(\mathcal{G})$ haben.

## 8.2 Definition

Sei $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq P\backslash\{0\}$ eine Menge von Elementen, die ein Ideal $I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle \subseteq P$ erzeugen. Wenn die Bedingungen aus 8.1 erfüllt sind, nennt man $G$ eine Gröbnerbasis von $I$ bzgl. $\sigma$ oder $\sigma-$Gröbnerbasis von $I$. Im Fall $I = \langle 0 \rangle$ definieren wir $G = \emptyset$ als Gröbnerbasis von $I$.

## 8.3 Satz: Existenz von Gröbnerbasen

Sei $I \neq \langle 0 \rangle$ ein Ideal von $P$.

- Gegeben seien $g_1, \ldots, g_s \in I\backslash\{0\}$ so dass $\mathrm{LT}_\sigma(I) = \langle \mathrm{LT}_\sigma(g_1), \ldots, \mathrm{LT}_\sigma(g_s) \rangle$, dann gilt $I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ und die Menge $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ ist eine $\sigma$-Gröbnerbasis von $I$.
- Das Ideal $I$ hat eine $\sigma$-Gröbnerbasis $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq I\backslash\{0\}$.

Beweis:
zu a):
Annahme: $\langle g_1, \ldots, g_s \rangle \subsetneq I$. Dann existiert ein Element $m \in I \setminus \langle g, \ldots, g_s \rangle$, dessen Leitterm $\mathrm{LT}_\sigma(m)$ minimal bzgl. $\sigma$ ist. Da $\mathrm{LT}_\sigma(m) \in \mathrm{LT}_\sigma(I) = \langle \mathrm{LT}_\sigma(g_1), \ldots, \mathrm{LT}_\sigma(g_s) \rangle$, existieren $c \in K\backslash\{0\}, t \in \mathbb{T}^n$ und $i \in \{1, \ldots, s\}$, so dass $\mathrm{LM}_\sigma(m) = ct\mathrm{LM}_\sigma(g_i)$. Also erhalten wir $\mathrm{LT}_\sigma(m - ctg_i) <_\sigma \mathrm{LT}_\sigma(m)$ und damit $m - ctg_i \in I, m - ctg_i \notin I\backslash\langle g, \ldots, g_s \rangle$, also $m \in \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ Widerspruch.
zu b):
Folgt aus a) mit 1.5.6.b aus [1].

## 8.4 Definition

Ein Ring (bzw. Modul) heißt noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen (bzw. Untermoduln) stationär wird.

## 8.5 Satz

Sei $R$ ein Ring und $M$ ein $R$-Modul. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.

- Jeder Untermodul von $M$ ist endlich erzeugt.
- Jede aufsteigende Kette $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ von Untermoduln von $M$ wird stationär.
- Jede nicht-leere Menge von Untermoduln von $M$ hat ein maximales Element (bzgl. Inklusion).

## 8.6 Satz

$P = K[x_1, \ldots, x_n]$ ist ein noetherscher Ring.
Beweis:
Die Behauptung folgt aus der Definition der Gröbnerbasen.

## 8.7 Bemerkung

Jeder endlich erzeugte Modul über einer endlich erzeugten $K$-Algebra ist noethersch.

## 8.8 Satz

Sei $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subseteq P\backslash\{0\}$ eine $\sigma$-Gröbnerbasis von $I = \langle g_1, \ldots, g_s\rangle \subseteq P^r$ und sei $m \in P$. Nach Bedingung $C_3$) existiert ein eindeutiges Element $m_G \in P$ so dass $m \xrightarrow{G} m_G$ und $m_G$ irreduzibel bzgl $\xrightarrow{G}$. Es gilt: $m - m_G \in I$ und $\text{Supp}(m_G) \cap \text{LT}_\sigma\{I\} = \emptyset$. $m_G$ ist insbesondere nicht abhängig von der Wahl der Gröbnerbasis.
Beweis:
Wir wissen, das $m - m_G \in I$ und das der Schnitt vom Träger von $m_G$ mit der Menge der Leitterme $\text{LT}_\sigma\{I\}$ leer ist. Die Eindeutigkeit folgt aus der Beobachtung, dass für 2 solche Elemente $m_G, m_H$ gilt, dass der Schnitt vom Träger von $m_G - m_H \in I$ mit $\text{LT}_\sigma\{I\}$ leer ist und das ist nach Bedingung $C_2$) nur möglich, wenn $m_G - m_H = 0$.

## 8.9 Definition

Sei $\langle 0\rangle \neq I \subseteq P$ ein Ideal und sei $m \in P$. Das Element $m_G \in P$ wird Normalform von $m$ bzgl. $\sigma$ genannt. Schreibweise $\text{NF}_{\sigma,I}(m)$ oder einfach $\text{NF}_\sigma(m)$, falls das Ideal $I$ aus dem Zusammenhand klar ist.

## 8.10 Korollar

Sei in der obigen Situation $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_s)$.

- Wenn $m \in P$ dann stimmt $\text{NR}_{\sigma,\mathcal{G}}(m)$ mit $\text{NF}_\sigma(m)$ überein. Insbesondere hängt der normale Rest nicht von der Reihenfolge der Elemente $g_1, \ldots, g_s$ ab.
- Für $m_1, m_2 \in P$ gilt $\text{NF}_\sigma(m_1 - m_2) = \text{NF}_\sigma(m_1) - \text{NF}_\sigma(m_2)$.
- Für $m \in P$ gilt $\text{NF}_\sigma(\text{NF}_\sigma(m)) = \text{NF}_\sigma(m)$.

Beweis:
Behauptung a) folgt aus $m - \text{NR}_{\sigma,\mathcal{G}}(m) \in I$ und dem Fakt, dass der Träger von $\text{NF}_{\sigma,\mathcal{G}}(m)$ und die Menge der Leitterme $\text{LT}_\sigma\{I\}$ einen leeren Schnitt haben.
Zu b):
Aus $m_1 - m_2 - (\text{NF}_\sigma(m_1) - \text{NF}_\sigma(m_2)) = (m_1 - \text{NF}_\sigma(m_1)) - (m_2 - \text{NF}_\sigma(m_2)) \in I$ und $\text{NF}_\sigma(m_1) - \text{NF}_\sigma(m_2)$ ist irreduzibel bzgl. $\xrightarrow{G}$. Die Eindeutigkeit der Normalform liefert die Aussage.
zu c):
Die Behauptung folgt aus b) mit $\text{NF}_\sigma(m) - \text{NF}_\sigma(m) = 0 \in I$ und $\text{NF}_\sigma(m)$ irreduzibel bzgl $\xrightarrow{G}$.

## 8.11 Satz

Sei $\{g_1, \dots, g_s\} \subseteq P$ das Erzeugendensystem des Ideals $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ von $P$ und sei $\{h_1, \dots, h_t\} \subseteq P$ das Erzeugendensystem des Ideals $J = \langle h_1, \dots, h_t \rangle \subseteq P$.

1. Für $m_1, m_2 \in P$ gilt $m_1 - m_2 \in I$ genau dann, wenn $\mathrm{NF}_{\sigma,I}(m_1) = \mathrm{NF}_{\sigma,I}(m_2)$. Insbesondere erfüllt ein Element $m \in P$ $m \in I$ genau dann, wenn $\mathrm{NF}_{\sigma,I}(m) = 0$.
2. Es gilt $J \subseteq I$ genau dann wenn $\mathrm{NF}_{\sigma,I}(h_i) = 0$ für $i = 1, \dots, t$.
3. Die Bedingung $I = J$ ist äquivalent zu $\mathrm{NF}_{\sigma,J}(g_i) = \mathrm{NF}_{\sigma,I}(h_j) = 0$ für $i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, t$.
4. Wenn $J \subseteq I$ und $\mathrm{LT}_\sigma\{I\} \subseteq \mathrm{LT}_\sigma\{J\}$, dann gilt $J = I$.

Beweis:
zu a):
Sei $m_1, m_2 \in P$, so dass $m_1 - m_2 \in I$. Dann gilt:
$0 = \mathrm{NF}_{\sigma,I}(m_1 - m_2) = \mathrm{NF}_{\sigma,I}(m_1) - \mathrm{NF}_{\sigma,I}(m_2)$.
Umgekehrt sei $\mathrm{NF}_{\sigma,I}(m_1) = \mathrm{NF}_{\sigma,I}(m_2)$. In diesem Fall folgt die Behauptung aus $m_1 - m_2 = (m_1 - \mathrm{NF}_{\sigma,I}(m_1)) - (m_2 - \mathrm{NF}_{\sigma,I}(m_2)) \in I$.
b) ist eine Konsequenz aus a) und c) folgt aus b).
Es bleibt d) zu zeigen:
Aus $J \subseteq I$ folgt, dass $\mathrm{LT}_\sigma\{J\} \subseteq \mathrm{LT}_\sigma\{I\}$. Die Annahme $\mathrm{LT}_\sigma\{I\} \subseteq \mathrm{LT}_\sigma\{J\}$ impliziert, dass $\mathrm{LT}_\sigma\{I\} = \mathrm{LT}_\sigma\{J\}$. Sei nun $m \in I$.
Es gilt $\mathrm{Supp}(\mathrm{NF}_{\sigma,J}(m)) \cap \mathrm{LT}_\sigma\{J\} = \mathrm{Supp}(\mathrm{NF}_{\sigma,J}(m)) \cap \mathrm{LT}_\sigma\{I\} = \emptyset$. Die Eindeutigkeit aus Satz 8.8 liefert $\mathrm{NF}_{\sigma,J}(m) = 0$, also $m \in J$.

## 8.12 Korollar: Neue Version des Macaulay Basis Satzes

Sei $I \subseteq P$ ein Ideal, sei $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq P \setminus \{0\}$ eine $\sigma$-Gröbnerbasis von $I$ und sei $B$ die Menge aller Terme in $\mathbb{T}^n$, die keine Vielfachen irgendeines Terms aus der Menge $\{\mathrm{LT}_\sigma(g_1), \dots, \mathrm{LT}-\sigma(g_s)\}$. Dann bilden die Restklassen der Elemente von $B$ eine $K$-Basis von $P/_I$
Beweis:
Da $G$ eine $\sigma$-Gröbnerbasis ist, und somit $\mathrm{LT}_\sigma\{I\}$ von $\{\mathrm{LT}_\sigma(g_1), \dots, \mathrm{LT}_\sigma(g_s)\}$ erzeugt wird, folgt die Behauptung aus Theorem 1.5.7 aus [1].