# 1 Leitterme

## 1.1 Bemerkung

Jedes Element $m \in P^r \backslash \{0\}$ hat eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Termen

$$m = \sum_{i=1}^{s} c_i t_i e_{\gamma_i}$$

Hierbei sind $c_1, ..., c_s \in R\backslash\{0\}, t_1, .., t_s \in \mathbb{T}^n, \gamma_1, ..., \gamma_s \in \{1, ..., r\}$ und es gilt:
$t_1 e_{\gamma_1} >_\sigma t_2 e_{\gamma_2} >_\sigma ... >_\sigma t_s e_{\gamma_s}$.

## 1.2 Definition

Für ein Element $m \in P^r$ ungleich Null sei $m = \sum_{i=1}^{s} c_i t_i e_{\gamma_i}$ die Darstellung nach Bemerkung 1.

a) Der Term $LT_\sigma(m) = t_1 e_{\gamma_1} \in \mathbb{T}^n \langle e_1, ..., e_r \rangle$ wird der Leitterm von $m$ bzgl. $\sigma$ genannt.

b) Das Element $LC_\sigma(m) = c_1$ wird der Leitkoeffizient von m bzgl. $\sigma$ genannt. Ist $LC_\sigma(m) = 1$, dann sagt man $m$ ist $\sigma$-normiert.

c) Wir setzen $LM_\sigma(m) = LC_\sigma(m) \cdot LT_\sigma(m) = c_1 t_1 e_{\gamma_1}$.

Als Beispiel betrachten wir das Polynom $f(x, y, z) = x^2y^2 + xz^4$. Bzgl. $\sigma = lex$ und $\sigma = deglex$ sieht der Leitterm folgenderma"en aus: $LT_{lex}(f) = x^2y^2$, $LT_{deglex}(f) = xz^4$. Hieran sieht man sofort, dass der Letterm bzgl. verschiedenen Termordnungen anders aussehen kann.

## 1.3 Satz

Sei nun $P = R[x_1, ..., x_n]$ der Polynomring über dem Ring $R$ und $\sigma$ eine Modulordnung auf $\mathbb{T}^n \langle e_1, ..., e_r \rangle$. Desweiteren, seien $f, f_1, f_2 \in P$ Polynome ungleich Null, und $m, m_1, m_2 \in P^r$ Polynomvektoren ungleich dem Nullvektor.
Dann gelten folgende Aussagen :

a) Es gilt $Supp(m_1 + m_2) \subseteq Supp(m_1) \cup Supp(m_2)$ und gilt darüberhinaus $m_1 + m_2 \neq 0$, so ist $LT_\sigma(m_1 + m_2) \leq_\sigma max_\sigma\{LT_\sigma(m_1), LT_\sigma(m_2)\}$.

b) Sei $m_1 + m_2 \neq 0$, und sei $LT_\sigma(m_1) \neq LT_\sigma(m_2)$ oder $LT_\sigma(m_1 + m_2) \neq 0$. Dann gilt folgende Gleichheit:

$$LT_\sigma(m_1) + LT_\sigma(m_2) = max_\sigma\{LT_\sigma(m_1), LT_\sigma(m_2)\}$$

c) Sei $t \in \mathbb{T}^n$, dann gilt: $LT_\sigma(tm) = t \cdot LT_\sigma(m)$.

d) Sei nun $R$ ein Integritätsbereich. Ist $t$ aus $Supp(f)$ so gewählt, so dass $t \cdot LT_\sigma(m)$ maximal bzgl. $\sigma$ ist, so gilt folgende Gleichheit: $t \cdot LT_\sigma(m) = LT_\sigma(fm)$

e) Sei R ein Integritätsbereich. Ist $\tau$ eine Monoidordnung auf $\mathbb{T}^n$, so dass $\sigma$ verträglich mit $\tau$ ist, so gilt: $LT_\tau(fm) = LT_\tau(f) \cdot LT_\sigma(m)$. Insbesondere ist: $LT_\tau(f_1 f_2) = LT_\tau(f_1) \cdot LT_\tau(f_2)$.

Als Beispiel betrachten wir die Polynome $m_1 := x^2y - z^3$ und $m_2 := x^2y - z^2$. Wir betrachten nun das Polynom $f(x, y, z) := m_1 + m_2 = x^2y - z^3 + x^2y - z^2$. Dann ist $LT_{lex}(f) = LT_{lex}(m_1 + m_2) = z^3 < x^2y = max_{lex}\{LT_{lex}(m_1), LT_{lex}(m_2)\}$. Das zeigt, dass bei a) auch echt größer stehen kann.

## 1.4 Definition

Sei im Folgenden $M \subseteq P^r$ ein P-Untermodul.

a) Der Modul $LT_\sigma(M) = \langle LT_\sigma(m) \,|m \in M \setminus \{0\}\rangle$ wird der Leittermmodul bzgl. $\sigma$ genannt.

b) Falls $r = 1$, d.h. falls $M \subseteq P$, so wird das Ideal $LT_\sigma(M)$, das Leittermideal von $M$ bzgl. $\sigma$ genannt.

c) Der Monomodul $\{LT_\sigma \,|m \in M\backslash\{0\}\} \subseteq \mathbb{T}^n \langle e_1, ..., e_r\rangle$ wird mit $LT_\sigma\{M\}$ bezeichnet.

Für $M = \langle 0\rangle$ erhalten wir $LT_\sigma(M) = \langle 0\rangle$ und $LT_\sigma\{M\} = \emptyset$. Sind $m_1, ..., m_s \in P^r$ von Null veschiedene Vektoren, und $M = \langle m_1, ..., m_s\rangle \subseteq P^r$, der von denen erzeugte Untermodul, so ist $\langle LT_\sigma(m_1), ..., LT_\sigma(m_s)\rangle \subseteq LT_\sigma(M)$. Das nächste Beispiel zeigt, dass dies auch eine echte Mengeninklusion sein kann.

## 1.5 Beispiel

Sei $I$ ein Ideal in $K[x, y]$ erzeugt durch $\{x^2 - 1, xy - 1\}$, und sei $\sigma = DegLex$. Dann impliziert $f = y(x^2 - 1) - x(xy - 1) = x - y \in I$, dass $LT_\sigma(f) = x \in LT_\sigma(I)$. Aber $x$ ist nicht enthalten im Ideal erzeugt durch $LT_\sigma(x^2 - 1) = x^2$ und $LT_\sigma(xy - 1) = xy$ Trotzdem existieren Systeme von Elementen aus $M$, deren Leitterme $LT_\sigma(M)$ erzeugen.

## 1.6 Satz

Sei $M \subseteq P^r$ ein echtes P-Untermodul.

a) Jeder Term $te_i \in LT_\sigma(M)$ mit $t \in \mathbb{T}^n$ und $1 \leq i \leq r$ ist von der Form $te_i = LT_\sigma(m)$ für ein $m \in M$.

b) Es existieren $m_1, ..., m_s \in M$ ungleich Null, so dass wir

$$LT_\sigma(M) = \langle LT_\sigma(m_1), ..., LT_\sigma(m_s)\rangle$$

erhalten.

*Beweis.* Die Elemente aus der Menge $LT_\sigma\{M\}$ erzeugen den R-Modul $LT_\sigma(M)$. Mit Satz 1.3.11a ist jeder Term aus $LT_\sigma(M)$ von der Form $t \cdot LT_\sigma(m)$ mit einem $t \in \mathbb{T}^n$ und $m \in M$ und deshalb gleich $LT_\sigma(tm)$. Damit ist a) bewiesen. Satz 1.3.9a impliziert, dass $LT_\sigma(M)$ durch endlich viele Terme aus $\mathbb{T}^n$ erzeugt wird. Somit erzeugen diese Terme den $R$-Modul $LT_\sigma(M)$. Wenden wir nun die Aussage a) an, ist b) bewiesen. $\square$

## 1.7 Satz (Macaulays Basissatz)

Sei $K$ ein Körper, $P = K[x_1, ..., x_n]$ ein Polynomring über $K$, $M \subseteq P^r$ ein $P$-Untermodul, und sei $\sigma$ eine Modultermordnung auf $\mathbb{T}^n \langle e_1, ..., e_n \rangle$. Die Menge der Terme $\mathbb{T}^n \langle e_1, ..., e_n \rangle \setminus LT_\sigma\{M\}$ wird mit $B$ bezeichnet.
Dann bilden die Restklassen von den Elementen aus $B$ eine Basis von dem $K$-Vektorraum $P^r/\ M$.

*Beweis.* Als erstes zeigen wir, dass die Restklassenelemte $b^- \in P^r/M$ mit $b \in B$ ein Erzeugendensystem von $P^r/M$ bilden. Dazu muss man zeigen, dass der Unterraum $N := \sum_{b \in B} K \cdot b + M$ gleich $P^r$ ist. Um einen Widerspruch zu erhalten, nimmt man an, dass $N \subset P^r$. Dann besitzt die Menge $P^r \setminus N$ ein Element ungleich dem Nullvektor. Der Satz ber die Aquivalenz von Wohlordnung und Termordnung impliziert, dass ein Element $m$ aus $P^r \setminus N$ existiert, dessen Leitterm bzgl. $\sigma$ minimal ist. Ist nun $LT_\sigma(m) \in B$, dann befindet sich das Element $m - LC_\sigma(m) \cdot LT_\sigma(m)$ noch immer in der Menge $P^r \setminus N$. Da dieses Element offenbar einen kleineren Leitterm besitzt als $m$, so ist dies ein Widerspruch zur Minimalitätseigenschaft von $m$. Nun sei $LT_\sigma(m) \in LT_\sigma\{M\}$. Auch hier liegt das Element $m - \frac{LC_\sigma(m)}{LC_\sigma(m')}\ m'$ wieder in $P^r \setminus N$ und hat einen kleineren Leitterm als $m$, Widerspruch.
Als letztes müssen wir noch die lineare Unabhängigkeit überprüfen. Angenommen es besteht die Beziehung $m = \sum_{i=1}^{s} c_i m_i \in M$ mit $c_1, ..., c_s \in K \setminus \{0\}$ und $m_1, ..., m_s \in B$. Dann ist der Leitterm $LT_\sigma(m) \in LT_\sigma\{M\}$, da $m \in M$. Wegen Proposition 2 und weil $m_1, ..., m_s$ Terme sind, gilt genauso, dass $LT_\sigma(m) \in Supp(m) \subseteq \{m_1, ..., m_s\} \subset B$. Also gilt, dass $LT_\sigma(m) \in LT_\sigma\{M\} \cap B = \emptyset$, was aber unmöglich ist. □

Als Beispiel betrachten wir den Polynomring $\mathbb{R}[x]$ und das Ideal $M = (x^2 + 1)$. Dann ist $\mathbb{T} \setminus LT\{M\} = \{1, x\}$ und die Restklassen dieser Elemente bilden eine Basis von $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ bzw. von dem Körper $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ - Vektorraum, da dieser ja isomorph zu $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ ist.
Die Forderung, dass $\sigma$ eine Termordnung ist, ist notwendig, wie das nächste Beispiel zeigt.

## 1.8 Beispiel

Sei $P = K[x]$ und $\sigma = Ord(-1)$, und sei $I$ das Hauptideal erzeugt durch $x - x^2$. Dann ist $LT_\sigma(x - x^2) = x$, und wir erhalten $\mathbb{T}^1 \setminus LT_\sigma\{I\} = \{1\}$. Jedoch ist die Restklasse von $x$ keine Konstante.

## 1.9 Satz

Sei $\sigma$ eine Monoidordnung auf $\mathbb{T}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\sigma = Lex$.

b) Sei $f \in P$ und $i \in \{1, ..., n\}$, so dass $LT_\sigma(f) \in R[x_i, ..., x_n]$. Dann ist $f \in R[x_i, ..., x_n]$.

*Beweis.* *a) ⇒ b).* Sei $f \in P$ mit $LT_{Lex}(f) \in R[x_i, ..., x_n]$. Ist $t \in Supp(f) \setminus \{LT_{Lex}(f)\}$, so gilt nach der Definition von Lex, dass $log(LT_{Lex}(f)) - log(t)$ positiv ist. Da aber die ersten $i - 1$ Komponenten von $LT_{Lex}(f)$ Null sind, müssen zwangsläufug die ersten $i - 1$ Komponenten von $t$ auch Null sein. Damit ist auch $t \in R[x_i, ..., x_n]$ für alle $t \in Supp(f)$

*b)* $\Rightarrow$ *a)*. Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{T}^n$, so dass $log(t_1) - log(t_2) = (0, ..., 0, c_{i-1}, ..., c_n)$ mit $c_{i-1} > 0$ gilt. D.h., dass die ersten $i-2$ Koordinaten von $log(t_1)$ und $log(t_2)$ gleich sind, so dass wir die Eigenschaft d) aus Definition (1.4.1) benutzen können und annehmen können, dass sie Null sind. Aus demselben Grund können wir annehmen, dass die $(i-1)$-ste Koordinate von $log(t_2)$ gleich null ist, während die $(i-1)$-ste Koordinate von $log(t_1)$ ungleich Null ist. Als nächstes betrachten wir wir das Polynom $f = t_1 + t_2$. Angenommen der Leitterm sei $LT_\sigma(f) = t_2$, was heien würde, dass $\sigma \neq Lex$ ist. Weiterhin ist $LT_\sigma(f) \in R[x_i, ..., x_n]$ und mit mit der Aussage b) als Vorrausstzung ist $f \in R[x_i, ..., x_n]$. Betrachtet man nun die Differenz $f - t_2 = t_1$, so folgt auch, dass $t_1 \in R[x_i, ..., x_n]$ ist. Da aber die $(i-1)$-ste Koordinate von $t_1$ ungleich Null ist, erhalten wir einen Wiederspruch. D.h wir haben gezeigt, dass $LT_\sigma = t_1$, also $t_1 >_\sigma t_2$. Alles zusammen haben wir gezeigt, dass $t_1 >_{Lex} t_2$ $t_1 >_\sigma t_2$ impliziert. □

## 1.10 Satz

Sei $\sigma$ eine Monoidordnung auf $\mathbb{T}^n$. Dann sind folgende Aussagen äqivalent:

a) $\sigma = RevLex$

b) Sei $f \in P$ und $i \in \{1, ..., n\}$, so dass $LT_\sigma(f) \in (x_i, ..., x_n)$. Dann ist $f \in (x_i, ..., x_n)$.

*Beweis.* *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Sei $f \in P$, so dass $LT_\sigma(f) \in (x_i, ..., x_n)$. Falls $t \in Supp(f) \backslash \{LT_\sigma(f)\}$, dann ist nach Definition von $RevLex$, die letzte von Null verschiedene Komponente von $log(LT_\sigma(f)) - log(t)$ negativ. Wenn nun aber die letzte von Null verschiedene Komponente von $log(LT_\sigma(f))$ an einer Position zwischen $i$ und $n$ ist, dann ist auch die letzte von Null verschiedene Komponente von log(t) an einer Position zwischen $i$ und $n$. Das bedeudet aber, dass alle Terme in $Supp(f)$ auch im Ideal $(x_i, ..., x_n)$ liegen.

*b)* $\Rightarrow$ *a)*. Seien nun $t_1, t_2 \in \mathbb{T}^n$, so dass $log(t_1) - log(t_2) = (c_1, ..., c_i, 0, ..., 0)$, mit $c_i < 0$. Die letzten $n - i$ Koordinaten von $log(t_1)$ und $log(t_2)$ sind gleich. Somit können wir die Eigenschaft d) aus Definition 1.4.1 nutzen und annehmen, dass sie Null seien. Aus demselben Grund können wir annehmen, dass die $i$-te Koordinate von $log(t_1)$ gleich Null ist und die $i$-te Koordinate von $log(t_2)$ ungleich Null ist. Betrachten wir nun das Polynom $f = t_1 + t_2$. Nehmen wir dazu an, dass $LT_\sigma(f) = t_2$. Dann ist $LT_\sigma(f) \in (x_i, ..., x_n)$. Nach Vorraussetzung ist dann auch $f \in (x_i, ..., x_n)$. Dementsprechend muss dann auch $t_1 = f - t_2 \in (x_i, ..., x_n)$ sein. Jedoch sind die letzten $n - i$ Koordinaten von $log(t_1)$ gleich Null. Widerspruch. Somit gilt $LT_\sigma(f) = t_1$, d.h. $t_1 > t_2$ und damit $\sigma = RevLex$. □