1 Monomiale Ideale und monomiale Moduln

1.1 Definition

Sei $(\Gamma, \circ)$ ein Monoid.

a) Eine nichtleere Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ heißt **Monoideal** in Γ, wenn $\Delta \circ \Gamma \subseteq \Delta$ gilt.

b) Eine Teilmenge B eines Monoideals Δ in Γ heißt **Erzeugendensystem** von Δ, wenn $\Delta = \{\beta \circ \gamma \mid \beta \in B, \gamma \in \Gamma\}$.

c) Eine Menge Σ zusammen mit einer Verknüpfung $* : \Gamma \times \Sigma \to \Sigma$ heißt Γ-**Monomodul**, wenn für alle $s \in \Sigma$ und für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ gilt

- $1_\Gamma * s = s$
- $(\gamma_1 \circ \gamma_2) * s = \gamma_1 * (\gamma_2 * s)$

d) Eine nichtleere Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ heißt ein Γ-**Untermonomodul** von Σ, wenn $\Gamma * \Sigma' \subseteq \Sigma'$ gilt.

e) Eine Teilmenge B eines Γ-Monomoduls Σ heißt **Erzeugendensystem** von Σ, falls $\Sigma = \{\gamma * s \mid \gamma \in \Gamma, s \in B\}$.

1.2 Beispiel

a) Die Menge aller Terme $\mathbb{T}^n = \{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}\}$ bildet zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation ein Monoid. Ein Monoideal in $\mathbb{T}^n$ ist zu Beispiel die Menge

$$\{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1 \geq a_1, \ldots, \alpha_n \geq a_n\}$$

mit festen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Ein Erzeugendensystem ist dann $\{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}\}$.

b) Seien $e_1 = (1\,0 \ldots 0)$, $e_2 = (0\,1 \ldots 0)$ usw. Die Menge $\mathbb{T}^n \langle e_1, \ldots, e_r \rangle = \{t \cdot e_i \mid t \in \mathbb{T}^n, 1 \leq i \leq r\}$ bildet zusammen mit der komponentenweisen Multiplikation ein $\mathbb{T}^n$-Monomodul.

Das Monoideal im obigen Beispiel ist offenbar endlich erzeugt. Im Weiteren soll nun gezeigt werden, dass dies keineswegs Zufall war, sondern dass jedes Monoideal in $\mathbb{T}^n$ endlich erzeugt ist. Wie das nächste Beispiel zeigt, ist dies jedoch keine Eigenschaft, die in jedem Monoid zu erwarten ist.

1.3 Beispiel

Die Menge $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ der nicht-negativen rationalen Zahlen bildet zusammen mit der gewöhnlichen Addition ein Monoid. Die Menge der positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_{>0}$ ist ein Monoideal in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$. Ein Erzeugendensystem ist zum Beispiel $\{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$. Ein endliches Erzeugendensystem gibt es nicht, denn wäre $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_s \mid \beta_i \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ ein solches, so gäbe es ein minimales Element $\beta_{min} \in B$. Offenbar hätte dann aber keine rationale Zahl $0 < q < \beta_{min}$ eine Darstellung $q = \beta_i + \gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

1.4 Satz

Für ein Monoid $(\Gamma, \circ)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Jedes Monoideal ist endlich erzeugt.

b) Jede aufsteigende Kette $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots$ von Monoidealen in Γ wird stationär.

c) Jede nichtleere Menge von Monoidealen in Γ hat ein maximales Element bezüglich Mengeninklusion, d.h. in dieser Menge gibt kein Monoideal, das dieses maximale Element echt enthält.

In diesem Falle heißt das Monoid Γ **noethersch**.

Beweis. *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Angenommen, es gibt eine Kette $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$ von Monoidealen in Γ und Indizes $n_1 < n_2 < \dots$, sodass es jeweils ein Element $\gamma_i \in \Delta_{n_{i+1}} \setminus \Delta_{n_i}$ gibt für alle $i \geq 1$. Betrachtet man das von diesen Elementen erzeugte Monoideal, also $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$, so ist dies enthalten in der Vereinigung $\bigcup_{i\geq 1} \Delta_{n_i}$. Es kann jedoch nicht sein, dass $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ schon in einem Δ_{n_i} enthalten ist, denn sonst wäre insbesondere auch $\gamma_i \in \Delta_{n_i}$, was nach Wahl von γ_i nicht möglich ist. Somit kann aber das Monoideal $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ nicht mehr endlich erzeugt sein, denn sonst wären die endlich vielen erzeugenden Elemente für ein hinreichend großes i doch in einem Δ_{n_i} enthalten und damit dann auch das Monoideal $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$. Widerspruch!
b) $\Rightarrow$ *c)*. Sei S eine nichtleere Menge von Monoidealen in Γ, die kein maximales Element enthält. Da S nichtleer ist, gibt es ein $\Delta_1 \in S$ und, da Δ_1 nicht maximal sein kann, muss es ein $\Delta_2 \in S$ geben mit $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Allgemein muss es für jedes $\Delta_i \in S$ ein $\Delta_{i+1} \in S$ geben mit $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$ für $i \geq 1$, da ansonsten Δ_i maximal wäre. Folglich erhält man eine aufsteigende Kette von Monoidealen, die nicht stationär wird. Widerspruch!
c) $\Rightarrow$ *a)*. Sei $\Delta \subseteq \Gamma$ ein Monoideal. Die Menge aller Monoideale, die von endlichen Teilmengen von Δ erzeugt werden, besitzt ein maximales Element $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ mit $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$. Dieses muss schon Δ selbst sein, denn andernfalls gäbe es ein Element $\gamma_{n+1} \in \Delta \setminus (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. In diesem Fall wäre das Monoideal $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})$ ebenfalls endlich erzeugt und würde das maximale Monoideal $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ echt enthalten. Dies kann wegen der Maximalität von $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ nicht sein. □

1.5 Satz

Für $n \geq 1$ ist das Monoid $(\mathbb{N}^n, +)$ noethersch.

Beweis. Induktion nach n. Für $n = 1$ ist offensichtlich jedes Monoideal von der Form (a) für ein $a \in \mathbb{N}$. Für $n > 1$ sei $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette von Monoidealen in $\mathbb{N}^n$. Angenommen, es gibt Indizes $n_1 < n_2 < \dots$ und Elemente $w_i \in \Delta_{n_{i+1}} \setminus \Delta_{n_i}$ für $i \geq 1$. Sei der Vektor $v_1 = w_{m_1} \in \{w_1, w_2, \dots\}$ so gewählt, dass die erste Komponente von v_1 minimal ist. Weiter sei $v_2 = w_{m_2} \in \{w_{m_1+1}, w_{m_1+2}, \dots\}$, wobei wiederum die erste Komponente minimal ist, usw. Somit erhält man mit $v_1, v_2, \dots$ eine Folge in $\mathbb{N}^n$, sodass die jeweils ersten Komponenten dieser Vektoren eine monoton steigende Folge in $\mathbb{N}$ bilden. Für $i \geq 1$ sei nun v_i' der Vektor in $\mathbb{N}^{n-1}$, der aus den letzten $n-1$ Komponenten von v_i besteht. Nach Induktionsvoraussetzung wird die aufsteigende Kette $(v_1') \subseteq (v_1', v_2') \subseteq \dots$ von Monoidealen in $\mathbb{N}^{n-1}$ stationär. Dann wird aber auch die aufsteigende Kette $(v_1) \subseteq (v_1, v_2) \subseteq \dots$ von Monoidealen in $\mathbb{N}^n$ stationär, da die ersten Komponenten eine monoton steigende Folge in $\mathbb{N}$ bilden. Daraus erhält man dann aber einen Widerspruch, denn nach Konstruktion von $w_1, w_2, \dots$ war ja $v_i = w_{m_i} \notin \left(w_1, \dots, w_{m_{i-1}}\right) \supseteq (v_1, \dots, v_{i-1})$ für alle $i \geq 2$. □

1.6 Lemma

Die Abbildung $\log : \mathbb{T}^n \to \mathbb{N}^n$, $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist ein Isomorphismus von Monoiden.

Beweis. Seien zunächst $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \in \mathbb{T}^n$. Dann gilt

$$\log\left(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \cdot x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}\right) = \log\left(x_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdots x_n^{\alpha_n+\beta_n}\right) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_n, \dots, \beta_n) = \log\left(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\right) + \log\left(x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}\right)$$

Für das neutrale Element von $\mathbb{T}^n$, also $1 = x_1^0 \cdots x_n^0$ und das neutrale Element von $\mathbb{N}^n$, also $(0, \dots, 0)$ gilt

$$\log\left(x_1^0 \cdots x_n^0\right) = (0, \dots, 0)$$

Somit ist die Abbildung log ein Homomorphismus von Monoiden. Die Bijektivität ist klar! □

1.7 Dickson's Lemma

Für $n \geq 1$ ist das Monoid $(\mathbb{T}^n, \cdot)$ noethersch.

Genauer sei $n \geq 1$ und seien $t_1, t_2, \ldots$ eine Folge von Termen in $\mathbb{T}^n$. Dann gibt es ein $N > 0$, so dass für $i > N$ der Term t_i ein Vielfaches einer der Terme $t_1, \ldots, t_N$ ist.

Beweis. Sei $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{T}^n$ eine Folge von Termen. Wie oben gezeigt ist die Abbildung log ein Isomorphismus zwischen den Monoiden $(\mathbb{T}^n, \cdot)$ und $(\mathbb{N}^n, +)$. Betrachtet man also das Monoideal $(\log(t_1), \log(t_2), \ldots) \subseteq \mathbb{N}^n$, so ist dies nach dem Satz 1.5 endlich erzeugt, d.h. es gibt ein $N > 0$, so dass $\{\log(t_1), \ldots, \log(t_N)\}$ ein Erzeugendensystem ist. Dann ist aber auch das Monoideal $(t_1, t_2, \ldots) \subseteq \mathbb{T}^n$ endlich erzeugt, wobei $\{t_1, \ldots, t_N\}$ ein Erzeugendensystem ist. □

Im Folgenden sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $P = R[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring über R in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$. Betrachtet man die Menge der r-Tupel von Polynomen, also P^r, so läßt sich auf dieser eine Addition komponentenweise erklären. Durch komponentenweise Multiplikation eines Polynoms mit einem solchen r-Tupel wird P^r schließlich zu einem P-Modul.

1.8 Definition

Gegeben sei der P-Modul P^r.

a) Eine kommutative Untergruppe $M \subseteq P^r$ heißt P-**Untermodul**, falls $P \cdot M \subseteq M$ ist.

b) Ein P-Untermodul I von dem P-Modul P, also im Falle $r = 1$, heißt auch **Ideal**.

c) Eine Teilmenge $\{m_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq M$ heißt **Erzeugendensystem** von M, falls

$$M = \{f_1 m_{\lambda 1} + \ldots + f_s m_{\lambda s} \mid f_1, \ldots, f_s \in P, \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \Lambda\}$$

1.9 Definition

Ein P-Untermodul $M \subseteq P^r$ heißt **monomialer Modul**, wenn M ein Erzeugendensystem mit Elementen aus $\mathbb{T}^n \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ besitzt. Ein monomialer Untermodul von P heißt auch **monomiales Ideal**.

Einfacher gesagt ist ein monomiales Ideal ein Ideal, das von Termen erzeugt wird. Nach dem Lemma von Dickson ist ein monomiales Ideal immer endlich erzeugt. Dass dies auch allgemeiner auf monomiale Moduln zutrifft, zeigt der folgende Satz.

1.10 Satz

Sei $M \subseteq P^r$ ein monomialer Modul.

a) Der Modul M ist endlich erzeugt, d.h. es gibt endlich viele Terme $t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{T}^n$ und Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in \{1, \ldots, r\}$, so dass gilt

$$M = \langle t_1 e_{\gamma_1}, \ldots, t_s e_{\gamma_s} \rangle$$

b) Es gibt monomiale Ideale $I_1, \ldots, I_r \subseteq P$, so dass gilt

$$M = \bigoplus_{i=1}^{r} I_i e_i$$

Beweis. *a*). Sei $B \subseteq \mathbb{T}^n \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ ein Erzeugendensystem von M. Für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ definiert man die Menge $B_i = \{t \in \mathbb{T}^n \mid te_i \in B\} \subseteq \mathbb{T}^n$. Nach Dickson's Lemma gibt es für die monomialen Ideale $I_i = (B_i)$ jeweils ein endliches Erzeugendensystem $G_i \subseteq B_i$. Offenbar ist dann durch $G_1 e_1 \cup \ldots \cup G_r e_r \subseteq \mathbb{T}^n \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ ein endliches Erzeugendensystem von M gegeben.
b). Aus dem Beweis zu a) folgt zunächst $M = \sum_{i=1}^{r} (G_i)\, e_i = \sum_{i=1}^{r} I_i e_i$. Wegen $I_i e_i \cap I_j e_j = \{0\}$ für $i \neq j$ ist die Summe direkt. □

1.11 CoCoA-Beispiel

Diese CoCoA-Funktion berechnet zu einer Liste von Termen, die ein monomiales Modul M erzeugen, eine Liste von Idealen $I_1, \ldots, I_r$ entsprehend dem obigen Satz, d.h. mit diesen gilt $M = \oplus_{i=1}^r I_i e_i$

```
Define MonComps(...)
  I:=[];
  For J:=1 To Len(ARGV[1]) Do
    B:=[];
    Foreach T In ARGV Do
      If Not T[J]=0 Then
        Append(B,T[J]);
      EndIf;
    EndForeach;
    Append(I,Ideal(B));
  EndFor;
  Return I;
EndDefine;
```

Zum Beispiel erzeugt der Befehl

```
MonComps([xyz,0,0],[xy^2,0,0],[0,y,0],[0,x^2z^3,0],[0,0,x^2yz]);
```

die folgende Ausgabe:

```
[Ideal(xyz, xy^2), Ideal(y, x^2z^3), Ideal(x^2yz)]
```

Bislang weiß man also von monomialen Moduln, dass diese immer ein endliches Erzeugendensystem besitzen. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass es sogar ein eindeutig bestimmtes, minimales Erzeugendensystem gibt.

1.12 Satz

Sei $M \subseteq P^r$ ein monomialer Modul.

a) Für jedes Erzeugendensystem $G = \{t_1, \ldots, t_s\} \subseteq \mathbb{T}^n \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ von M und jeden Term $t \in M$ gibt es einen Term $t_i \in G$, so dass t ein Vielfaches von t_i ist.

b) In der Menge aller aus Termen bestehender Erzeugendensysteme von M gibt es bezüglich Mengeninklusion ein eindeutig bestimmtes, kleinstes Element, d.h. keine echte Teilmenge dieses kleinsten Elements ist ein Erzeugendensystem von M.

Dieses kleinste Erzeugendensystem heißt **minimales monomiales Erzeugendensystem** von M.

Beweis. a). Da G ein Erzeugendensystem von M ist, gibt es für jeden Term $t \in M$ eine Darstellung $t = \sum_{i=1}^s f_i t_i$ mit $f_1, \ldots, f_s \in P$. Wegen $\{t\} = Supp(t) = Supp(\sum_{i=1}^s f_i t_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^s Supp(f_i t_i)$ muss für ein $i \in \{1, \ldots, s\}$ gelten, dass $t \in Supp(f_i t_i)$ ist.
b). Zunächst soll die Existenz gezeigt werden. Aus dem vorherigen Satz folgt, dass es ein endliches Erzeugendensystem von M bestehend aus Termen gibt. Entfernt man alle doppelten Elemente und diejenigen, die ein Vielfaches eines anderen Elements sind, so erhält man ein Erzeugendensystem G, welches nicht mehr verkürzbar ist. Anderenfalls gäbe es nämlich ein $t \in G$, so dass $G \setminus \{t\}$ immernoch ein Erzeugendensystem von M ist. Dann wäre aber nach a) t ein Vielfaches eines Elements $t' \in G \setminus \{t\}$ und somit würde das Erzeugendensystem G das Element t' und mit t ein Vielfaches von t' enthalten, was nach obiger Konstruktion nicht sein kann.
Angenommen, es gibt zwei verschiedene minimale monomiale Erzeugendensysteme G_1 und G_2 von M. Œ gibt es einen Term $t \in G_1 \setminus G_2$. Aus a) folgt nun, dass t ein Vielfaches eines Elements $t' \in G_2$ ist. Ebenfalls aus a) folgt, dass dieses Element t' und damit auch t ein Vielfaches eines Elements aus G_1

sein muss. Wegen der Minimalität von G_1 muss dieses Element schon t selbst sein, denn sonst würde G_1 ein Element und mit t ein Vielfaches dieses Elements enthalten. Also sind t und t' jeweils Vielfache voneinander, woraus zunächst

$$t = s' \cdot t' \qquad \text{und} \qquad t' = s \cdot t \qquad \text{mit } s, s' \in \mathbb{T}^n$$

und damit $t = s's \cdot t$ bzw. $s's = 1$ folgt. Da $1 = x_1^0 \cdot \ldots \cdot x_n^0$ die einzige Einheit in $\mathbb{T}^n$ ist, gilt $t = t' \in G_2$. Widerspruch! □

1.13 CoCoA-Beispiel

Die folgende CoCoA-Funktion berechnet zu einer Liste von Termen, die ein monomiales Ideal erzeugen, ein minimales monomiales Erzeugendensystem.

```
Define MinMonomials(...)
  B:=Set(ARGV);
  Foreach T In B Do
    If NR(T,Diff(B,[T]))=0 Then
      B:=Diff(B,[T]);
    EndIf;
  EndForeach;
  Return B;
EndDefine;
```

Zum Beispiel erzeugt der Befehl

```
MinMonomials(xy,xz,xyz,x^2y,xy,z);
```

die Ausgabe

```
[xy, z]
```