Universität Dortmund
S: Computeralgebra
Wintersemester 2006/2007
Dozent: Prof. Dr. M. Kreuzer

Syzygien und Graduierungen

Stefan Kaspar
e-Mail: stefan.kaspar@uni-dortmund.de
Studiengang: Diplom Mathematik
5. Semester

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins, $n \geq 1$, $P = R[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über R, $g_1, \dots, g_s \in P$ und $\langle g_1, \dots, g_s \rangle = I \subseteq P$ ein Ideal in P. Aufgrund des Vortrags über das Thema „Ersetzungsregeln“ (Kapitel 2.2 in [1]) wissen wir, dass die Erzeuger $g_1, \dots, g_s$ des Ideals unter Umständen gewisse wünschenswerte Eigenschaften besitzen können, dies aber im Allgemeinen nicht der Fall ist. Andererseits existiert ein solches wünschenswertes Erzeugendensystem jedoch immer (Propositionen 1.5.6 sowie 2.1.2 und 2.1.3 in [1]). Es stellt sich daher die Frage, wie es möglich ist, ausgehend von einem beliebigen Erzeugendensystem, zu einem Erzeugendensystem zu gelangen, welches diese Eigenschaften besitzt. Um eine Antwort auf diese Frage geben zu können, untersuchen wir zunächst algebraische Objekte namens „Syzygien“. Thema der nächsten drei Seminarvorträge wird es sein, die notwendigen Grundlagen zu einer gewissenhaften Untersuchung zu schaffen, gewisse Strukturen aufzuzeigen und die Verbindung zu dem gesuchten Erzeugendensystem mit den gewünschten Eigenschaften herzustellen. Die Erkenntnisse, die wir während der Untersuchung erlangen, werden nicht nur ein besseres Verständnis der speziellen Eigenschaften dieser gesuchten Erzeugendensysteme ermöglichen, sondern auch richtungsweisend zur Angabe eines expliziten Verfahrens sein, mittels dessen ein solches Erzeugendensystem berechnet werden kann.

2 Syzygien und Graduierungen

2.1 Syzygien

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der formalen Definition der zu untersuchenden Objekte.

2.1.1 Definition. Seien R ein kommutativer Ring mit Eins, I ein Ideal in R und $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_s)$ ein Tupel aus Elementen von I.

a) Eine **Syzygie von** $\mathcal{G}$ ist ein Tupel $(f_1, \dots, f_s) \in R^s$, für das $f_1 g_1 + \cdots + f_s g_s = 0$ gilt.

b) Die Menge $\mathrm{Syz}_R(\mathcal{G}) = \mathrm{Syz}_R(g_1, \dots, g_s)$ aller Syzygien von $\mathcal{G}$ bildet einen R-Modul, genannt **(erster) Syzygien-Modul von** $\mathcal{G}$. Falls keine Verwechselungsgefahr besteht, schreiben wir auch $\mathrm{Syz}(\mathcal{G})$ oder $\mathrm{Syz}(g_1, \dots, g_s)$.

Bevor wir uns die Definition anhand eines Beispiels, auf das während unserer Untersuchung vermehrt zurückgegriffen wird, verdeutlichen, wollen wir noch einige Konventionen aufstellen.

Konventionen:
Falls nicht anders angegeben, seien im folgenden K ein Körper, $n \geq 1$, $P = K[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über K und σ eine Termordnung auf $\mathbb{T}^n$. Weiter seien $g_1, \dots, g_s \in P \setminus \{0\}$, $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle \subseteq P$ ein Ideal in P und $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_s)$. Auf dem P-Modul P^s mit kanonischer Basis $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s\}$ führen wir einen Homomorphismus $\lambda : P^s \to I$ durch $\varepsilon_j \mapsto g_j$ für $1 \leq j \leq s$ ein. Hiermit erhalten wir die Darstellung $\mathrm{Syz}_P(\mathcal{G}) = \ker(\lambda)$ für den Syzygien-Modul von $\mathcal{G}$.

2.1.2 Beispiel. Seien $n = 3$, $P = \mathbb{Q}[x, y, z]$, $\sigma = \mathtt{DegLex}$ und $I = \langle g_1, g_2 \rangle$ mit $g_1 = x^2 - y^2 - x$ und $g_2 = xy^2 - z^3$. Setzen wir noch $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Syz}(\mathcal{G}) &= \{(f_1, f_2) \in P^2 \mid f_1 g_1 + f_2 g_2 = 0\} \\ &= \{(f_1, f_2) \in P^2 \mid f_1(x^2 - y^2 - x) + f_2(xy^2 - z^3) = 0\}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen überprüfen wir schnell, dass einige Syzygien von $\mathcal{G}$ durch die Vielfachen von $(g_2, -g_1)$ gegeben sind. Wie wir an weitere Syzygien - falls vorhanden - gelangen, ist zu diesem Zeitpunkt aber noch unklar.

Wir wenden nun eine Vorgehensweise an, die uns helfen wird, eine gewisse Vereinfachung in die Frage nach der Struktur eines Syzygien-Moduls einzuführen: Wir definieren $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}) := (\mathrm{LM}_\sigma(g_1), \ldots, \mathrm{LM}_\sigma(g_s))$ und gehen vom Ideal $I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle \subseteq P$ zum Ideal $J = \langle \mathrm{LM}_\sigma(g_1), \ldots, \mathrm{LM}_\sigma(g_s) \rangle \subseteq P$ über.

Zunächst erinnern wir uns, dass eine Sequenz $U \xrightarrow{\lambda} V \xrightarrow{\mu} W$ von Homomorphismen $\lambda : U \to V$, $\mu : V \to W$ **exakt** heißt, wenn $\mathrm{im}(\lambda) = \ker(\mu)$ gilt. Durch Kombination der exakten Sequenz $0 \longrightarrow I \longrightarrow P \longrightarrow P/I \longrightarrow 0$ mit der Beschreibung von $\mathrm{Syz}(\mathcal{G})$ als Kern von λ erhalten wir folgende lange exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Syz}(\mathcal{G}) \longrightarrow P^s \xrightarrow{\lambda} P \longrightarrow P/I \longrightarrow 0$$

Definieren wir $\Lambda : P^s \to J$, $\varepsilon_j \mapsto \mathrm{LM}_\sigma(g_j)$ für $1 \le j \le s$, so ist $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) = \ker(\Lambda)$ der Syzygien-Modul von $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})$ und wir erhalten eine zweite lange exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) \longrightarrow P^s \xrightarrow{\Lambda} P \longrightarrow P/J \longrightarrow 0$$

Wir werden nun das Ziel verfolgen, zu Beweisen, dass $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ nicht nur ein endliches Erzeugendensystem besitzt, sondern dass dieses auch eine gewisse spezielle Struktur besitzt, welche wir als nächstes präzise definieren werden. Hierzu benötigen wir noch ein weiteres mathematisches Konzept, das uns erlaubt, jene Struktur auf dem P-Modul P^s einzuführen, die wir für die weiteren Überlegungen brauchen.

2.2 Graduierte Ringe und graduierte Moduln

2.2.1 Definition. Seien $(\Gamma, +)$ ein kommutativer Monoid, R ein kommutativer Ring mit Eins.

a) R heißt **Γ-graduierter Ring** oder **(R, Γ)-graduierter Ring** oder **graduiert über Γ**, falls eine Familie von additiven Untergruppen $\{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ von R existiert, so dass gilt:

   1) $R = \oplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$.
   2) $R_\gamma \cdot R_{\gamma'} \subseteq R_{\gamma + \gamma'} \qquad \forall\ \gamma, \gamma' \in \Gamma$.

b) Die Elemente aus R_γ werden **homogen vom Grad** γ genannt. Wir schreiben $\deg(r) = \gamma$ für $r \in R_\gamma$.

c) Sei $r \in R$ und $r = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma$ die nach a.1) eindeutige Zerlegung von r in Elemente $r_\gamma \in R_\gamma$. Dann heißt r_γ **homogene Komponente vom Grad γ von** r.

Wir klären das Verständnis der Definition eines Γ-graduierten Rings anhand zweier Beispiele.

2.2.2 Beispiel. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $n \ge 1$ und $P = R[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über R. Wir definieren eine $\mathbb{N}$-Graduierung auf P wie folgt $(d \ge 0)$:

$$P_d := \{f \in P \mid \deg(t) = d \text{ für alle } t \in \mathrm{supp}(f)\}$$

Wir können uns schnell davon überzeugen, dass P_d tatsächlich eine additive Untergruppe für jedes $d \ge 0$ ist und die beiden Eigenschaften einer Graduierung erfüllt sind, da sich jedes

Polynom $f = c_1t_1 + \ldots + c_mt_m$ aus P eindeutig als Summe von Elementen aus $P_{d_1}, \ldots, P_{d_m}$ darstellen lässt für geeignete $d_1, \ldots, d_m \geq 0$ und $\deg(t \cdot t') = \deg(t) + \deg(t')$ gilt für $t, t' \in \mathbb{T}^n$. Diese Graduierung wird **Standardgraduierung auf** P genannt und die Polynome aus P_d heißen **homogene Polynome (oder Formen) vom Grad** d.

2.2.3 Beispiel. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $n \geq 1$ und $P = R[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über R. Wir setzen $P_t := R \cdot t$ für $t \in \mathbb{T}^n$ und erhalten somit eine Familie von additiven Untergruppen P_t von P, für die $P_t \cap P_{t'} = \{0\}$ für $t \neq t'$ gilt. Da sich jedes Polynom aus P in eine Summe aus Monomen zerlegen lässt, gilt also $P = \oplus_{t \in \mathbb{T}^n} P_t$. Schließlich ist auch $P_t \cdot P_{t'} \subseteq P_{t \cdot t'}$ erfüllt, d.h. es liegt wieder eine $\mathbb{T}^n$-Graduierung auf P vor.

Der nächste Schritt besteht darin, die Definition einer Graduierung auf Moduln auszuweiten.

2.2.4 Definition. Seien $(\Gamma, +)$ ein kommutativer Monoid, R ein kommutativer Γ-graduierter Ring mit Eins, $(\Sigma, *)$ ein Γ-Monomodul und M ein R-Modul.

a) Wir nennen M einen **Σ-graduierten R-Modul** oder einen **Σ-graduierten** (R, Γ)-**Modul** (oder einfach einen **Γ-graduierten R-Modul**, falls $\Sigma = \Gamma$), falls eine Familie von Untergruppen $\{M_s\}_{s \in \Sigma}$ von M existiert, so dass gilt:

   1) $M = \oplus_{s \in \Sigma} M_s$.
   2) $R_\gamma \cdot M_s \subseteq M_{\gamma * s} \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma,\, s \in \Sigma$.

b) Die Elemente von M_s werden **homogen vom Grad** s genannt. Wir schreiben $\deg(m) = s$ für $m \in M_s$.

c) Sei $m \in M$ und $m = \sum_{s \in \Sigma} m_s$ die nach a.1) eindeutige Zerlegung von m in Elemente $m_s \in M_s$. Dann heißt m_s **homogene Komponente vom Grad** s **von** m.

Wir können das Beispiel 2.2.3 erweitern, um die Definition eines Σ-graduierten Moduls zu veranschaulichen.

2.2.5 Beispiel. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $n \geq 1$ und $P = R[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über R. Aus Beispiel 2.2.3 wissen wir, dass P ein $\mathbb{T}^n$-graduierter Ring ist. Für $r \geq 1$ ist die Teilmenge $\mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ des P-Moduls P^r ein $\mathbb{T}^n$-Monomodul. Setzen wir nun $(P^r)_{te_i} := R \cdot te_i$ für ein $t \in \mathbb{T}^n$ und $1 \leq i \leq r$, so erhalten wir $P^r = \oplus_{te_i \in \mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle} (P^r)_{te_i}$ und $R_{t'} \cdot (P^r)_{te_i} \subseteq (P^r)_{t' \cdot te_i}$ für alle $t' \in \mathbb{T}^n$, $te_i \in \mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$, d.h. P^r ist ein $\mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$-graduierter P-Modul.

Nachdem wir nun Graduierungen für Ringe und Module definiert haben, wollen wir noch Homomorphismen einführen, die zu einer gegebenen Modul-Graduierung kompatibel sind.

2.2.6 Definition. Seien R ein kommutativer Γ-graduierter Ring mit Eins, M ein Σ-graduierter R-Modul und N ein weiterer Σ-graduierter R-Modul. Eine R-lineare Abbildung $\lambda : M \to N$ heißt **Homomorphismus Σ-graduierter R-Moduln** oder **homogene R-lineare Abbildung**, falls $\lambda(M_s) \subseteq N_s$ gilt für alle $s \in \Sigma$.

Betrachten wir für einen Körper K den Polynomring $P = K[x]$ mit der Standardgraduierung aus Beispiel 2.2.2, so stellen wir fest, dass für das Ideal $I = \langle x - 1\rangle \subseteq P$ offenbar $I \cap P_d = \{0\}$ für alle $d \geq 0$ gilt. Die durch die Graduierung an P verliehene Struktur geht in I sozusagen verloren. Wir führen daher noch Ideale bzw. Untermoduln ein, für die diese Situation nicht eintritt.

2.2.7 Definition. Ein R-Untermodul N des Σ-graduierten R-Moduls M heißt ein **Σ-graduierter R-Untermodul von** M falls $N = \oplus_{s\in\Sigma}(N \cap M_s)$ gilt.
Ein Γ-graduierter R-Untermodul von R wird auch **Γ-homogenes Ideal von** R oder einfach **homogenes Ideal von** R genannt, falls Γ durch den Kontext eindeutig festgelegt ist.

2.2.8 Bemerkung. Sei $N \subseteq M$ ein Σ-graduierter R-Untermodul von M. Definieren wir $(M/N)_s := M_s/N_s$ für alle $s \in \Sigma$, dann erhalten wir eine Familie von (additiven) Untegruppen des Restklassenmoduls M/N. Hierdurch wird M/N ebenfalls zu einem Σ-graduierten R-Modul, denn durch Anwenden des zweiten Isomorphiesatzes erhalten wir $\oplus_{s\in\Sigma}(M_s/(M_s \cap N)) \cong \oplus_{s\in\Sigma}((M_s + N)/N)$ und somit $M/N \cong \oplus_{s\in\Sigma}(M_s/(M_s \cap N))$. Die kanonische Projektion $M \to M/N$ wird hierdurch zu einem Homomorphismus Σ-graduierter R-Moduln. Insbesondere ist dann der Restklassenring R/I von R eines homogenen Ideals I wieder ein Γ-graduierter Ring.

Zum Abschluss des Abschnitts über Graduierungen wollen wir noch einen Satz beweisen, anhand dessen wir für einen gegebenen Untermodul schnell entscheiden können, ob er Σ-graduiert ist oder nicht.

2.2.9 Satz. *Sei $N \subseteq M$ ein R-Untermodul des Σ-graduierten R-Moduls M und sei $N_s := N \cap M_s$ für alle $s \in \Sigma$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $N = \oplus_{s\in\Sigma} N_s$.

b) Ist $n \in N$ und $n = \sum_{s\in\Sigma} n_s$ die Zerlegung von n in homogene Komponenten, so gilt $n_s \in N$ für alle $s \in \Sigma$.

c) Es existiert ein Erzeugendensystem von N, das aus homogenen Komponenten besteht.

Beweis. Wir zeigen zuerst a) $\Rightarrow$ b): Sei $n \in N$ und sei $\sum_{s\in\Sigma} n_s = n$ die Zerlegung von n in Komponenten $n_s \in N_s$ für alle $s \in \Sigma$, die nach Voraussetzung existiert. Wegen $n_s \in N_s \subseteq M_s$ und $M = \oplus_{s\in\Sigma} M_s$, ist dies auch die Zerlegung von n in homogene Komponente aus M und es gilt daher $n_s \in N$ für alle $s \in \Sigma$.
Als nächstes zeigen wir b) $\Rightarrow$ c): Ist $\{n_\beta \mid \beta \in B\}$ ein Erzeugendensystem von N, so können wir jedes n_β in homogene Komponenten zerlegen, die wiederum selbst in N liegen. Die Menge der homogenen Komponenten jedes n_β ist dann ein homogenes Erzeugendensystem von N.
Zuletzt zeigen wir noch c) $\Rightarrow$ a): Sei $\{n_\beta \mid \beta \in B\}$ ein homogenes Erzeugendensystem von N und sei $n \in N$. Dann hat n die Form $n = \sum_{\beta\in B} r_\beta n_\beta$ mit gewissen $r_\beta \in R$. Wir können die r_β weiter in ihre homogenen Komponenten zerlegen und erhalten $r_\beta = \sum_{\gamma\in\Gamma} r_{\beta,\gamma}$. Insgesamt gilt daher

$$n = \sum_{\beta\in B}(\sum_{\gamma\in\Gamma} r_{\beta,\gamma})n_\beta = \sum_{s\in\Sigma}(\sum_{\{(\beta,\gamma)\ \mid\ \gamma*\deg(n_\beta)=s\}} r_{\beta,\gamma}n_\beta) \in \sum_{s\in\Sigma} N_s,$$

d.h $N = \sum_{s\in\Sigma} N_s$. Aus $M = \oplus_{s\in\Sigma} M_s$ folgern wir schließlich wieder, dass diese Summe eine direkte Summe sein muss. □

2.2.10 Korollar. *Sei $N \subseteq M$ ein Σ-graduierter R-Untermodul des Σ-graduierten R-Moduls M, $N_s := N \cap M_s$ für alle $s \in \Sigma$ und sei $\{n_\beta \mid \beta \in B\}$ ein homogenes Erzeugendensystem von N. Desweiteren gelte in Σ die rechtsseitige Kürzungsregel und es sei $s \in \Sigma$. Dann besitzt jedes $n \in N_s$ eine Darstellung $n = \sum_{\beta\in B} r_\beta n_\beta$ mit homogenen Elementen $r_\beta \in R$, so dass $\deg(r_\beta) * \deg(n_\beta) = s$ gilt für alle $\beta \in B$.*

Beweis. Sei $n = \sum_{\beta \in B} r_\beta n_\beta$ mit $r_\beta \in R$ für alle $\beta \in B$. Wir können jedes r_β in eine Summe von homogenen Komponenten zerlegen. Sind dabei r'_β und r''_β zwei homogene Komponenten, für die $s = \deg(r'_\beta) * \deg(n_\beta) = \deg(r''_\beta) * \deg(n_\beta)$ gilt, so können wir nach Voraussetzung $\deg(r'_\beta) = \deg(r''_\beta)$ folgern, d.h. die beiden Komponenten sind homogen vom gleichen Grad und wir können sie zu einer einzigen homogenen Komponente zusammenfassen. Wir schreiben daher r_β als Summe $r'_\beta + r''_\beta$, wobei r'_β die eindeutige homogene Komponente von r_β ist, für die $\deg(r'_\beta) * \deg(n_\beta) = s$ gilt und r''_β die Summe der restlichen homogenen Komponenten ist. So erhalten wir schließlich $n = \sum_{\beta \in B} r'_\beta n_\beta + \sum_{\beta \in B} r''_\beta n_\beta$ und leiten daraus $0 = (\sum_{\beta \in B} r'_\beta n_\beta - n) + \sum_{\beta \in B} r''_\beta n_\beta$ ab. Können wir zeigen, dass $\sum_{\beta \in B} r''_\beta n_\beta = 0$ gilt, haben wir die gewünschte Darstellung von n gefunden und sind fertig. Da $n \in N_s$ und per Konstruktion auch $\sum_{\beta \in B} r'_\beta n_\beta \in N_s$, ist folglich auch die Differenz der beiden Elemente eine homogene Komponente aus N_s. Es muss daher $\sum_{\beta \in B} r'_\beta n_\beta - n = 0$ gelten, da $0 = (\sum_{\beta \in B} r'_\beta n_\beta - n) + \sum_{\beta \in B} r''_\beta n_\beta$ eine Darstellung der 0 als Summe von homogenen Komponenten ist. □

2.2.11 Bemerkung. Ist $\lambda : M \to N$ ein Homomorphismus Σ-graduierter R-Moduln, so ist $\ker(\lambda)$ nach Satz 2.2.9 ebenfalls ein Σ-graduierter R-Modul. Denn: λ ist R-linear, d.h. $\ker(\lambda)$ ist ein R-Untermodul von M und somit selbst ein R-Modul. Sei $m \in \ker(\lambda)$ und $m = \sum_{s \in \Sigma} m_s$ die Zerlegung von m in homogene Komponenten $m_s \in M_s$. Dann gilt $0 = \lambda(m) = \sum_{s \in \Sigma} \lambda(m_s)$ und wegen $\lambda(m_s) \in N_s$ somit $\lambda(m_s) = 0$, d.h. $m_s \in \ker(\lambda) \cap M_s$. Nach 2.2.9 ist dann $\ker(\lambda) = \oplus_{s \in \Sigma}(\ker(\lambda) \cap M_s)$.

2.3 Eine Graduierung auf P^s

Wir kehren nun zu unserem ursprünglichen Zielvorhaben zurück und betrachten wieder die lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) \longrightarrow P^s \xrightarrow{\Lambda} P \longrightarrow P/J \longrightarrow 0.$$

Aus Beispiel 2.2.5 wissen wir, indem wir den Spezialfall $r = 1$ zugrunde legen, dass P ein $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Modul über dem $\mathbb{T}^n$-graduierten Ring P ist. Wir haben Λ als Homomorphismus von P^s nach $J \subseteq P$ definiert und für ein Element $\sum_{j=1}^s f_j \varepsilon_j \in P^s$ gilt $\Lambda(\sum_{j=1}^s f_j \varepsilon_j) = \sum_{j=1}^s f_j \mathrm{LM}_\sigma(g_j)$. Der nächste Schritt besteht daher darin, eine Graduierung auf P^s zu erklären, die mit Λ kompatibel ist und die uns zu weiteren Erkenntnissen führen wird.

2.3.1 Definition. Wir definieren für alle $t \in \mathbb{T}^n$

$$\begin{aligned} (P^s)_t &:= \{\sum_{j=1}^s c_j t_j \varepsilon_j \in P^s \mid c_j = 0 \text{ oder } t_j \mathrm{LT}_\sigma(g_j) = t \text{ für } j = 1, \ldots, s\} \\ &= \{(c_1 t_1, \ldots, c_s t_s) \in P^s \mid c_j = 0 \text{ oder } t_j \mathrm{LT}_\sigma(g_j) = t \text{ für } j = 1, \ldots, s\}. \end{aligned}$$

2.3.2 Beispiel. (Fortsetzung von Beispiel 2.1.2) In unserem Beispiel ist $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}) = (x^2, xy^2)$. Wir erhalten dann z.B. für $x^2y^2 \in \mathbb{T}^3$ die Menge $(P^2)_{x^2y^2} = \{(c_1t_1, c_2t_2) \in P^2 \mid c_1t_1x^2, c_2t_2xy^2 \in \mathbb{Q} \cdot x^2y^2\}$, die unter anderem die Elemente $(y^2, 0)$ und $(-y^2, x)$ enthält.

Wir wollen nun zeigen, dass die in Definition 2.3.1 eingeführten Mengen tatsächlich eine Graduierung auf P^s bilden und Λ hierdurch zu einem Homomorphismus $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Moduln wird.

2.3.3 Satz. *Seien $(P^s)_t$ für $t \in \mathbb{T}^n$ wie in 2.3.1 definiert. Dann gilt:*

a) $P^s = \oplus_{t\in\mathbb{T}^n}(P^s)_t$, *d.h.* P^s *ist ein* $\mathbb{T}^n$*-graduierter* P*-Modul über dem* $\mathbb{T}^n$*-graduierten Ring* P*.*

b) Die Abbildung Λ *ist ein Homomorphismus* $\mathbb{T}^n$*-graduierter* P*-Moduln und die Sequenz* $0 \longrightarrow \mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) \longrightarrow P^s \xrightarrow{\Lambda} P \longrightarrow P/J \longrightarrow 0$ *besteht aus Homomorphismen* $\mathbb{T}^n$*-graduierter* P*-Moduln.*

Beweis. Wir beweisen zunächst Aussage a) indem wir zeigen, dass alle Eigenschaften einer Graduierung, wie sie in 2.2.4 eingeführt wurde, erfüllt sind. In unserem Fall ist $(\Gamma,+) = (\Sigma,*) = (\mathbb{T}^n,\cdot)$, $R = P$ und $M = P^s$.
Wir stellen zuerst fest, dass $(P^s)_t$ für alle $t \in \mathbb{T}^n$ eine Gruppe ist. Nun wollen wir $P^s = \oplus_{t\in\mathbb{T}^n}(P^s)_t$ zeigen. Sei dazu $\sum_{j=1}^s f_j\varepsilon_j \in P^s$. Betrachten wir dieses Element genauer, so stellen wir fest, dass es aus einer Summe von Elementen der Form $ct'\varepsilon_j$ besteht mit $c \in K \setminus \{0\}$, $t' \in \mathbb{T}^n$ und $1 \le j \le s$. Per Definition gilt $ct'\varepsilon_j \in (P^s)_{t'\mathrm{LT}_\sigma(g_j)}$, d.h. es bleibt noch zeigen, dass $\sum_{t\in\mathbb{T}^n}(P^s)_t$ eine direkte Summe ist. Wir überlegen uns dazu folgendes: Für jedes $j \in \{1,\dots,s\}$ und jeden Term $t \in \mathbb{T}^n$ kann es höchstens einen Term t' in $\mathrm{supp}(f_j)$ geben, der $t'\mathrm{LT}_\sigma(g_j) = t$ erfüllt. Daher kann jeder Term aus $\mathrm{supp}(\sum_{j=1}^s f_j\varepsilon_j)$ nur in genau einem Summanden $(P^s)_t$ enthalten sein, d.h. $\sum_{t\in\mathbb{T}^n}(P^s)_t$ ist tatsächlich eine direkte Summe.
Die erste Eigenschaft einer Graduierung ist daher erfüllt und wir müssen jetzt noch $t\cdot(P^s)_{t'} \subseteq (P^s)_{t\cdot t'}$ zeigen. Durch Nachrechnen überzeugen wir uns, dass auch diese Eigenschaft erfüllt ist und (P^s) somit ein $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Modul über dem $\mathbb{T}^n$-graduierten Ring P ist.

Zum Beweis der Aussage b) erinnern wir uns an die Definition 2.2.6 und halten $\Lambda((P^s)_t) \subseteq (P)_t$ als Beweisziel fest. Sei nun $t \in \mathbb{T}^n$ und $\sum_{j=1}^s c_jt_j\varepsilon_j \in (P^s)_t$. Dann gilt $\Lambda(\sum_{j=1}^s c_jt_j\varepsilon_j) = \sum_{j=1}^s c_jt_j\mathrm{LM}_\sigma(g_j) = (\sum_{j=1}^s c_j\mathrm{LC}_\sigma(g_j))t \in (P)_t$ und Λ ist ein Homomorphismus $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Moduln.
Zuletzt müssen wir noch die Aussage über die lange exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) \longrightarrow P^s \xrightarrow{\Lambda} P \longrightarrow P/J \longrightarrow 0$ beweisen. Wir stellen als erstes fest, dass die Homomorphismen $0 \to \mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ und $P/J \to 0$ unter der Annahme, dass P/J ein $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Modul ist, Homomorphismen $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Moduln sind. Wegen $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) = \ker(\Lambda)$ erbt $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ die Struktur von P^s und wird so zu ebenfalls zu einem $\mathbb{T}^n$-graduierten P-Modul (siehe Bemerkung 2.2.11). Somit ist die kanonische Projektion $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) \to P^s$ auch ein Homomorphismus $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Moduln. Um schließlich noch zu zeigen, dass die kanonische Projektion $P \to P/J$ ein Homomorphismus $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Moduln ist, erinnern wir uns an die Bemerkung 2.2.8. J ist ein $\mathbb{T}^n$-graduierter Untermodul des $\mathbb{T}^n$-graduierten P-Moduls P und wir können damit auf P/J eine $\mathbb{T}^n$-Graduierung durch $(P/J)_t = (P)_t/(J)_t$ einführen, die den kanonischen Homomorphismus $P \to P/J$ zu einem Homomorphismus $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Moduln macht. □

Ziel der folgenden Definition und des folgenden Satzes ist es, Begriffe einzuführen, die uns den Umgang mit der $\mathbb{T}^n$-Graduierung aus 2.3.1 auf P^s erleichtern.

2.3.4 Definition. Sei P^s mit der in 2.3.1 definierten Graduierung versehen, $m \in P^s \setminus \{0\}$ und $m = \sum_{t\in\mathbb{T}^n} m_t$ die Zerlegung von m in homogene Komponenten. Der Term $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m) := \max_\sigma\{t \in \mathbb{T}^n \mid m_t \neq 0\} \in \mathbb{T}^n$ heißt ***σ*-Grad von** m.

2.3.5 Bemerkung. Es gelten die Voraussetzungen aus 2.3.4 für P^s und sei $m = \sum_{j=1}^s f_j\varepsilon_j \in P^s \setminus \{0\}$ mit $f_1,\dots,f_s \in P$. Dann gilt

$$\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m) = \max_\sigma\{\mathrm{LT}_\sigma(f_jg_j) \mid j \in \{1,\dots,s\}, f_jg_j \neq 0\}.$$

Dies ergibt sich aus den Regeln zum Rechnen mit Leittermen (Proposition 1.5.3 in [1]) und Defintion 2.3.4.

Erweitern wir zur Veranschaulichung der vorhergehenden Definition ein weiteres Mal unser Beispiel 2.1.2.

2.3.6 Beispiel. (Fortsetzung von Beispiel 2.1.2) Zur Erinnerung: $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}) = (x^2, xy^2)$. Wir wollen nun für die zwei Elemente $(\frac{1}{2}y^2z, -4xz), (y^2z-x, -4x^2-y-3) \in P^2$ nacheinander die σ-Grade berechnen. Im ersten Fall errechnen wir $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(\frac{1}{2}y^2z, -4xz) = \max_\sigma\{y^2z\cdot x^2, xz\cdot xy^2\} = x^2y^2z$. Im zweiten Fall ergibt sich $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(y^2z-x, -4x^2-y-3) = \max_\sigma\{y^2z\cdot x^2, x^2\cdot xy^2\} = x^3y^2$. Zum Vergleich geben wir noch im letzten Fall die Zerlegung von $(y^2z - x, -4x^2 - y - 3)$ in homogene Komponenten an und sehen, dass die Berechnungen korrekt sind: $(y^2z - x, -4x^2 - y - 3) = \underbrace{(y^2z, 0)}_{\in (P^2)_{x^2y^2z}} + \underbrace{(-x, 0)}_{\in (P^2)_{x^3}} + \underbrace{(0, -4x^2)}_{\in (P^2)_{x^3y^2}} + \underbrace{(0, -y)}_{\in (P^2)_{xy^3}} + \underbrace{(0, -3)}_{\in (P^2)_{xy^2}}$.

Nachdem wir nun die nötigen mathematischen Begriffe zusammengestellt haben, können wir das Hauptziel dieser Seminarausarbeitung präzise formulieren und den Beweis dazu in Angriff nehmen.

2.4 Syzygien von Elementen aus monomialen Idealen

2.4.1 Theorem. (Syzygien von Elementen aus monomialen Idealen)
Wir schreiben für $j = 1, \ldots, s$ die Leitmonome $\mathrm{LM}_\sigma(g_j)$ in der Form $\mathrm{LM}_\sigma(g) = c_jt_j$ mit $c_j \in K$ und $t_j \in \mathbb{T}^n$. Weiter definieren wir für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ die Terme $t_{ij} := \frac{\mathrm{kgV}(t_i,t_j)}{t_i}$. Dann gilt:

a) Für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ mit $i < j$ ist das Element $\sigma_{ij} := \frac{1}{c_i}t_{ij}\varepsilon_i - \frac{1}{c_j}t_{ji}\varepsilon_j \in P^s$ eine Syzygie von $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})$ und es ist homogen vom σ-Grad $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(\sigma_{ij}) = \mathrm{kgV}(t_i, t_j)$.

*b) $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) = \langle \sigma_{ij} \mid 1 \le i < j \le s\rangle$.
Insbesondere ist $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ ein endlich erzeugter $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Untermodul von P^s.*

Beweis. Um a) zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass $\mathrm{kgV}(t_i, t_j) = \mathrm{kgV}(t_j, t_i)$ gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, s\}$. Dann erhalten wir

$$\Lambda(\sigma_{ij}) = \frac{1}{c_i}t_{ij}\mathrm{LM}_\sigma(g_i) - \frac{1}{c_j}t_{ji}\mathrm{LM}_\sigma(g_j) = \mathrm{kgV}(t_i, t_j) - \mathrm{kgV}(t_j, t_i) = 0,$$

d.h. σ_{ij} ist eine Syzygie von $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})$. Weiter ergibt sich

$$\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(t_{ij}\varepsilon_i) = \frac{\mathrm{kgV}(t_i, t_j)}{t_i}\mathrm{LT}_\sigma(g_i) = \mathrm{kgV}(t_i, t_j) = \frac{\mathrm{kgV}(t_j, t_i)}{t_j}\mathrm{LT}_\sigma(g_j) = \deg_{\sigma,\mathcal{G}}(t_{ji}\varepsilon_j),$$

d.h. $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(\sigma_{ij}) = \mathrm{kgV}(t_i, t_j)$.

In den Beweis zu b) fließt nun auch unsere erarbeitete Theorie mit ein. Im Hinblick auf a) ist es klar, dass $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) \neq 0$ genau dann erfüllt ist, wenn $s \ge 2$ gilt. In 2.3.3 haben wir gezeigt, dass Λ ein Homomorphismus $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Moduln und somit insbesondere $\ker(\Lambda)$ $=\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ ein $\mathbb{T}^n$-graduierter P-Untermodul von P^s ist, der nach Satz 2.2.9 ein homogenes Erzeugendensystem besitzt. Wir zeigen im folgenden, dass wir jedes homogene

Erzeugendenelement durch die Elemente σ_{ij} mit $1 \leq i < j \leq s$ darstellen können. Sei dazu $m = \sum_{j=1}^{s} a_j \bar{t}_j \in P^s \setminus \{0\}$ ein solches homogenes Erzeugendenelement mit $a_j \in K$, $\bar{t}_j \in \mathbb{T}^n$. Da m homogen ist, existiert ein $t \in \mathbb{T}^n$ mit $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m) = t$, d.h. es gilt $\bar{t}_j \mathrm{LT}_\sigma(g_j) = t$ für alle $1 \leq j \leq s$ mit $a_j \neq 0$. Wir definieren nun $\mathrm{size}(m)$ als die Kardinalität der Menge $\{i \in \{1,\ldots,s\} \mid a_i \neq 0\}$. Wegen $\Lambda(m) = 0$, muss $\sum_{j=1}^{s} a_j c_j = 0$ gelten und da $m \neq 0$, muss $\mathrm{size}(m) \geq 2$ sein. Wir beweisen jetzt mittels Induktion nach $\mathrm{size}(m)$ die Aussage b):
Sei hierzu für den Induktionsanfang $\mathrm{size}(m) = 2$. Dann gibt es zwei Indices $\alpha, \beta \in \{1,\ldots,s\}$, $\alpha < \beta$, für die $a_\alpha \neq 0 \neq a_\beta$ und $m = a_\alpha \bar{t}_\alpha + a_\beta \bar{t}_\beta$ gilt. Wegen $t = \bar{t}_\alpha t_\alpha = \bar{t}_\beta t_\beta$ ist t ein Vielfaches von $\mathrm{kgV}(t_\alpha, t_\beta)$ und wir können

$$\bar{t}_\alpha = \frac{t}{t_\alpha} = \frac{t}{\mathrm{kgV}(t_\alpha, t_\beta)} t_{\alpha\beta} \qquad \text{und} \qquad \bar{t}_\beta = \frac{t}{t_\beta} = \frac{t}{\mathrm{kgV}(t_\beta, t_\alpha)} t_{\beta\alpha}$$

schreiben. Das Element $\frac{\bar{t}_\alpha}{c_\alpha} - \frac{\bar{t}_\beta}{c_\beta} = \frac{t}{\mathrm{kgV}(t_\alpha, t_\beta)} \sigma_{\alpha\beta}$ ist eine Syzygie von $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})$ und besitzt den selben σ-Grad t wie m. Das Element

$$m' := m - a_\alpha c_\alpha \frac{t}{\mathrm{kgV}(t_\alpha, t_\beta)} \sigma_{\alpha\beta} = (\frac{a_\alpha c_\alpha}{c_\beta} + a_\beta) \bar{t}_\beta$$

ist wieder homogen vom gleichen σ-Grad t wie m und eine Syzygie von $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})$, allerdings mit $\mathrm{size}(m') < \mathrm{size}(m) = 2$. Nach unserer Überlegung zur Mindestgröße von $\mathrm{size}(m')$ von oben muss der Koeffizient $\frac{a_\alpha c_\alpha}{c_\beta} + a_\beta$ dann gleich 0 sein, d.h. $m' = 0$ und somit $m = a_\alpha c_\alpha \frac{t}{\mathrm{kgV}(t_\alpha, t_\beta)} \sigma_{\alpha\beta}$.
Sei nun $\mathrm{size}(m) > 2$. Analog wie für $\mathrm{size}(m) = 2$ leiten wir her, dass Indices $\alpha, \beta \in \{1,\ldots,s\}$, $\alpha < \beta$, existieren, so dass das Element

$$m' := m - a_\alpha c_\alpha \frac{t}{\mathrm{kgV}(t_\alpha, t_\beta)} \sigma_{\alpha\beta}$$

homogen vom gleichen σ-Grad t wie m und eine Syzygie von $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})$ ist, wobei wieder $\mathrm{size}(m') < \mathrm{size}(m)$ gilt. Wir können daher auf m' die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten wie gewünscht eine Darstellung von m der Form $m = \sum_{1 \leq i < j \leq s} p_{ij} \sigma_{ij} + a_\alpha c_\alpha \frac{t}{\mathrm{kgV}(t_\alpha, t_\beta)} \sigma_{\alpha\beta}$ mit gewissen $p_{ij} \in P$. $\square$

Der Beweis zu 2.4.1 ist konstruktiv: Er gibt uns nicht nur ein konkretes Erzeugendensystem von $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ an, sondern auch eine Methode, Elemente $m \in \mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ als Kombination der σ_{ij} darzustellen. Betrachten wir hierzu noch ein abschließendes Beispiel.

2.4.2 Beispiel. Seien $n = 3$, $P = \mathbb{Q}[x,y,z]$ und $\sigma = \mathtt{DegRevLex}$. Wir setzen $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ mit $g_1 = 4x^2y - x$, $g_2 = 3xy^3$, $g_3 = yz - x - 1$ und erhalten somit $\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}) = (4x^2y, 3xy^3, yz)$. Nach Satz 2.4.1 wird $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ von den Elementen $\sigma_{12} = (\frac{1}{4}y^2, -\frac{1}{3}x, 0)$, $\sigma_{13} = (\frac{1}{4}z, 0, -x^2)$, $\sigma_{23} = (0, \frac{1}{3}z, -xy^2)$ erzeugt.
Das Element $m = (y^2z, -2xz, 2x^2y^2) = y^2z\varepsilon_1 - 2xz\varepsilon_2 + 2x^2y^2\varepsilon_3 \in P^3$ liegt wegen $y^2z \cdot 4x^2y - 2xz \cdot 3xy^3 + 2x^2y^2 \cdot yz = 0$ in $\mathrm{Syz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$, ist homogen vom σ-Grad $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m) = x^2y^3z$ und es gilt $\mathrm{size}(m) = 3$. Wir wollen m nun als Kombination der $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ darstellen. Hierzu schreiben wir zuerst $m = a_1y^2z\varepsilon_1 + a_2xz\varepsilon_2 + a_3x^2y^2\varepsilon_3$ mit $a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = 2$. Wie im Beweis wählen wir $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$ mit $\alpha < \beta$ und $a_\alpha \neq 0 \neq a_\beta$, in unserem Fall $\alpha = 1, \beta = 2$. Somit erhalten wir $\mathrm{kgV}(t_1, t_2) = \mathrm{kgV}(x^2y, xy^3) = x^2y^3$, $\frac{x^2y^3z}{\mathrm{kgV}(t_1,t_2)} = z$, $m' = m - a_1c_1\frac{x^2y^3z}{\mathrm{kgV}(t_1,t_2)}\sigma_{12} = m - 4z\sigma_{12} = (0, -\frac{2}{3}xz, 2x^2y^2)$ und $\mathrm{size}(m') = 2 < 3 = \mathrm{size}(m)$. Mit m' verfahren wir analog wie mit m und erhalten $m' = -2x\sigma_{23}$. Insgesamt haben wir damit die Darstellung $m = 4z\sigma_{12} - 2x\sigma_{23}$ gefunden.

3 Quelltext des CoCoA-Programms zu Theorem 2.4.1

```
Define MonomialSyz(MonomialList) -- berechnet homogenes Erzeugendensystem
N := NumIndets();
S := Len(MonomialList);
Sigma := List([]);

-- \sigma_{ij}-Liste mit 0-Vektoren initialisieren
For I := 1 To N-1 Do
  Append(Sigma, List([]));
  For J := 1 To N Do
    Append(Sigma[I], Vector(S));
  EndFor;
EndFor;

-- \sigma_{ij} berechnen
For I := 1 To N-1 Do
  For J := I+1 To N Do
    CI := LC(MonomialList[I]);
    TI := LT(MonomialList[I]);
    CJ := LC(MonomialList[J]);
    TJ := LT(MonomialList[J]);
    TIJ := LCM(TI, TJ)/TI;
    TJI := LCM(TJ, TI)/TJ;
    Sigma[I][J] := TIJ/CI*E_(I,S) - TJI/CJ*E_(J,S);
  EndFor;
EndFor;

Return Sigma;
EndDefine; -- MonomialSyz


---------------
-- Beispiel 1 -
---------------
P ::= Q[x,y,z], DegRevLex;
Using P Do
  G := [ 4x^2y - x, 3xy^3, yz - x - 1];
  LMG := [ LM(P) | P In G ];

  -- Generatoren von Syz(LM(G)) berechnen und ausgeben
  Sigma := MonomialSyz(LMG);

  PrintLn; PrintLn; PrintLn;
  PrintLn("Beispiel 1");
  PrintLn("----------");
  PrintLn("P = ", P, ", Termordnung = DegRevLex,");
  PrintLn("G = ", G, ",");
```

```
  PrintLn("LM(G) = ", LMG, ".");
  PrintLn;
  For I := 1 To NumIndets()-1 Do
    For J := I+1 To NumIndets() Do
      PrintLn("Sigma[", I, "][", J, "] = ", Sigma[I][J]);
    EndFor;
  EndFor;
EndUsing;


---------------
-- Beispiel 2 -
---------------
P ::= Q[a,b,c,d], DegLex;
Using P Do
  G := [ 4a^2b + c, 3cd^3 - b, abc - b + 3, c^3d + b^2 - 3c, ad^2 + 4b - d ];
  LMG := [ LM(P) | P In G ];

  -- Generatoren von Syz(LM(G)) berechnen und ausgeben
  Sigma := MonomialSyz(LMG);

  PrintLn; PrintLn; PrintLn;
  PrintLn("Beispiel 2");
  PrintLn("----------");
  PrintLn("P = ", P, ", Termordnung = DegLex,");
  PrintLn("G = ", G, ",");
  PrintLn("LM(G) = ", LMG, ".");
  PrintLn;
  For I := 1 To NumIndets()-1 Do
    For J := I+1 To NumIndets() Do
      PrintLn("Sigma[", I, "][", J, "] = ", Sigma[I][J]);
    EndFor;
  EndFor;
EndUsing;
```

4 Quellen

[1] M. Kreuzer und L. Robbiano, *Computational Commutative Algebra 1*, Springer, Heidelberg 2000, 76-79, 99-105.