2 Termordnungen

Wegen der Kommutativität der Addition im Polynomring $R[x_1, \ldots, x_n]$ lässt gibt es verschiedene Möglichkeiten ein Polynom aufzuschreiben. So bezeichnen zum Beispiel die Ausdrücke $5x^2 + 2x + 1$ und $1 + 2x + 5x^2$ ein und dasselbe Polynom. Will man nun eine Datenstruktur für Polynome im Computer implementieren und diese in einem Programm verwenden, so stellt sich die Frage, in welcher Reihenfolge die Terme des Polynoms abgespeichert werden sollen. Es wird also eine *Ordnung* für das Monoid der Terme $\mathbb{T}^n$ benötigt.

Zunächst wollen wir einen allgemeinen Ordnungs-Begriff für beliebigen Mengen angeben.

Definition 2.1 „Relation", „Ordnung"
Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $\sigma \subseteq M \times M$ wird Relation *genannt und für $(m_1, m_2) \in \sigma$ schreiben wir $m_1 \leq_\sigma m_2$ oder auch $m_2 \geq_\sigma m_1$. Ist zusätzlich $m_1 \neq m_2$, so schreiben wir auch $m_1 <_\sigma m_2$ bzw. $m_1 >_\sigma m_2$.*

σ heißt totale *oder* vollständige *Relation, falls für alle $m_1, m_2 \in M$ $m_1 \leq_\sigma m_2$ oder $m_2 \leq_\sigma m_1$ gilt.*

Eine totale Relation σ heißt Ordnung*, falls für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$ folgende Eigenschaften gelten:*

1. *$m_1 \leq_\sigma m_1$ (Reflexivität)*
2. *$m_1 \leq_\sigma m_2$ und $m_2 \leq_\sigma m_1 \;\Rightarrow\; m_1 = m_2$ (Antisymmetrie)*
3. *$m_1 \leq_\sigma m_2$ und $m_2 \leq_\sigma m_3 \;\Rightarrow\; m_1 \leq_\sigma m_3$ (Transitivität)*

Gilt zusätzlich für jede Teilmenge $S \subseteq M$, dass es ein $m \in S$ gibt, so dass für alle $m' \in S$ $m \leq_\sigma m'$ gilt, so nennt man σ eine Wohlordnung.

Der Begriff der Wohlordnung lässt sich auch alternativ über eine Eigenschaft aller monoton fallenden Folgen charakterisieren.

Lemma 2.2
Sei M eine Menge und σ eine Ordnung auf M. σ ist genau dann eine Wohlordnung, wenn jede monoton fallende Folge $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in M mit $m_1 \leq_\sigma m_2 \leq_\sigma \ldots$ eine konstante Teilfolge besitzt.

Beweis. Sei σ eine Wohlordnung und $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in M mit $m_1 \leq_\sigma m_2 \leq_\sigma \ldots$ eine monoton fallende Folge. Annahme: (m_i) hat keine konstante Teilfolge. Sei $m \in S := \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq M$. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m = m_k$ und ein $j \in \mathbb{N}, j > k$ mit $m_j <_\sigma m_k$, da (m_i) eine monoton fallende Folge ohne konstante Teilfolge ist. Also besitzt M' kein minimales Element im Widerspruch zur Voraussetzung, dass σ Wohlordnung ist.

Sei σ keine Wohlordnung. Dann gibt es eine Teilmenge $S \subseteq M$, die kein minimales Element enthält. Da es zu jedem Element $m \in S$ ein Element $m' \in S$ mit $m' <_\sigma m$ gibt, lässt sich eine streng monoton fallende Folge konstruieren, diese besitzt insbesondere keine konstante Teilfolge. $\square$

Auf Monoiden ist es wünschenswert, dass Ordnungen verträglich mit der Verknüpfung des Monoids sind. Im Falle von $\mathbb{T}^n$ bedeutet dies, dass die Reihenfolge der Terme in einem Polynom erhalten bleibt, wenn man das Polynom mit einem Term multipliziert.

Definition 2.3 „Monoid-Ordnung“, „Termordnung“
Sei $(\Gamma, \circ)$ *ein Monoid und* σ *eine Ordnung auf* Γ*. Falls für alle* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ *die Bedingung*

$$\gamma_1 \leq_\sigma \gamma_2 \;\Rightarrow\; \gamma_3 \circ \gamma_1 \leq_\sigma \gamma_3 \circ \gamma_2$$

erfüllt ist, nennt man σ *eine* Monoid-Ordnung.

Gilt zusätzlich für alle $\gamma \in \Gamma$ $1_\Gamma \leq_\sigma \gamma$*, so nennt man* σ *eine* Termordnung.

Bemerkung 2.4
Ist $(\Gamma, \circ)$ *ein Monoid,* $\Delta \subseteq \Gamma$ *ein Untermonoid von* Γ *und* σ *eine Monoidordnung auf* Γ*, so ist die Einschränkung* σ *auf* Δ *eine Monoidordnung auf* Δ*. Wir werden im Folgenden nicht zwischen* σ *und der Einschränkung von* σ *unterscheiden.*

Beispiel 2.5
Die Ordnung $\leq$ des vollständig geordneten Körpers $\mathbb{R}$ ist eine Monoidordnung auf $(\mathbb{R}, +)$ und jedem Untermonoid von $(\mathbb{R}, +)$. Insbesondere ist $\leq$ eine Wohl- und Termordnung auf $(\mathbb{N}, +)$.

Satz 2.6
Seien $(\Gamma, \circ), (\Delta, *)$ *Monoide und* τ *eine Monoidordnung auf* Δ*. Sei* $\varphi : \Gamma \to \Delta$ *ein Monoidmonomorphismus. Die durch die Vorschrift*

$$\gamma_1 \leq_\sigma \gamma_2 \;:\Leftrightarrow\; \varphi(\gamma_1) \leq_\tau \varphi(\gamma_2)$$

für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ *definierte Relation* σ *ist eine Monoidordnung auf* Γ*. Ferner ist* σ *eine Term- bzw. Wohlordnung, falls* τ *eine Term- bzw. Wohlordnung ist.*

Beweis. Die Vollständigkeit, Reflexivität und Transitivität von σ sowie die zusätzliche Eigenschaft einer Wohlordnung werden von jeder beliebigen Abbildung übertragen. Da φ injektiv ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma_1 \leq_\sigma \gamma_2 \text{ und } \gamma_2 \leq_\sigma \gamma_1 \quad &\Rightarrow \quad \varphi(\gamma_1) \leq_\tau \varphi(\gamma_2) \text{ und } \varphi(\gamma_2) \leq_\tau \varphi(\gamma_1) \\ &\Rightarrow \quad \varphi(\gamma_1) = \varphi(\gamma_2) \\ &\Rightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2. \end{aligned}$$

Folglich ist σ antisymmetrisch. Die Verträglichkeit mit der Mulitiplikation wird durch die Homomorphieeigenschaft von φ geliefert. Ist τ eine Termordnung, so ist wegen $\varphi(1_\Gamma) = 1_\Delta$ auch σ eine Termordnung. □

Aus dem vorangegangen Satz folgt, dass durch eine Monoidordnung auf einem Monoid ebenfalls eine äquivalente Ordnung auf jedem isomorphen Monoid - sofern man sich auf einen bestimmten Isomorphismus festlegt - definiert wird. Wir werden deshalb im Folgenden nicht zwischen Ordnungen auf den durch log zueinander isomorphen Monoiden $(\mathbb{T}^n, \cdot)$ und $(\mathbb{N}^n, +)$ unterscheiden. Insbesondere schreiben wir für eine Monoidordnung σ auf $\mathbb{N}^n$ auch $t_1 \leq_\sigma t_2$ für $t_1, t_2 \in \mathbb{T}^n$, falls $\log(t_1) \leq_\sigma \log(t_2)$.

Wir wollen nun ein erstes Beispiel für eine Ordnung auf $\mathbb{T}^n$ geben.

Satz und Definition 2.7 „Lexikographische Ordnung"
Die Relation Lex ist definiert durch die Vorschrift

$$a \leq_{Lex} b \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} a = b \\ \text{oder} \\ \exists i \in \{1, \ldots, n\}, a_i < b_i : \forall k \in \{1, \ldots, i-1\} : a_k = b_k \end{array}$$

für $a, b \in \mathbb{Z}^n$. Lex ist eine Monoidordnung auf $(\mathbb{R}^n, +)$, sie wird auch lexikographische Ordnung *genannt. Auf dem Untermonoid $(\mathbb{N}^n, +)$ (bzw. $(\mathbb{T}^n, \cdot)$) ist Lex eine Termordnung.*

Beweis. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^n$.

Die Reflexivität von *Lex* folgt direkt aus der Definition. Für $a \neq b$ gibt es einen kleinsten Index i mit $a_i \neq b_i$ und es ist genau eine der beiden Seiten dieser Ungleichung kleiner als die andere. Somit ist *Lex* auch total und antisymmetrisch.

Seien $a \leq_{Lex} b$ und $b \leq_{Lex} c$. Falls $a = b$ oder $b = c$ ist, so ist schon $a \leq_{Lex} c$. Ansonsten gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_i < b_i$ und $a_k = b_k$ für alle $k < i$ sowie ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $b_j < c_j$ und $b_k = c_k$ für alle $k < j$. Falls $i \leq j$, so folgt aus $a_i < b_i \leq c_i$ und $a_k = b_k = c_k$ für alle $k < i$ auch $a \leq_{Lex} c$. Der Fall $i > j$ lässt sich analog behandeln.

Sei nun $a \leq_{Lex} b$ und c beliebig. Falls $a = b$, so folgt schon $c + a \leq_{Lex} c + b$. Ansonsten gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_i < b_i$ und $a_k = b_k$ für alle $k < i$. Es ist $c_i + a_i < c_i + b_i$ und $c_k + a_k = c_k + b_k$ für alle $k < i$. Es folgt $c + a \leq_{Lex} c + b$. *Lex* ist somit eine Monoidordnung.

Sei nun $a \in \mathbb{N}^n$. Falls $a \neq 0$, so gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_i \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < i$. Wegen $a_i \in \mathbb{N}$ ist $a_i > 0$ und somit $a >_{Lex} 0$. □

Mit Hilfe der lexikographischen Ordnung und Satz 2.6 können wir nun leicht weitere Ordnungen auf $\mathbb{T}^n$ definieren.

Satz und Definition 2.8 *Ord*(V)
Sei $V \in GL(n, \mathbb{R})$ mit ganzzahligen Matrixelementen $v_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Die Relation Ord$(V)$ ist definiert durch die Vorschrift

$$a \leq_{Ord(V)} b \quad :\Leftrightarrow \quad Va \leq_{Lex} Vb$$

für $a, b \in \mathbb{N}^n$.

Die so definierte Relation Ord(V) ist eine Monoidordnung auf $\mathbb{N}^n$ bzw. $\mathbb{T}^n$. Ferner ist Ord(V) eine Termordnung genau dann, wenn der erste Nicht-Null-Eintrag jeder Spalte positiv ist.

Beweis. Da V regulär ist, ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}^n, a \mapsto Va$ ein Monoidmonomorphismus und $Ord(V)$ somit eine Monoidordnung auf $\mathbb{N}^n$.

$Ord(V)$ ist eine Termordnung genau dann, wenn $0 <_{Ord(V)} e_i := \log(x_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, da jedes Element des Monoids von endlich vielen der e_i erzeugt wird. Es ist $Ve_i = V_{\cdot i}$ und somit $0 \leq_{Ord(V)} e_i$ genau dann, wenn der erste Nicht-Nulleintrag von $V_{\cdot i}$ positiv ist. □

Beispiel 2.9 *„Rückwärts-lexikographische Ordnung"*
Für die Matrix

$$V_{RevLex} := \begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & \cdot & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}$$

wird $RevLex := Ord(V_{RevLex})$ die *rückwärts-lexikographische Ordnung* genannt. Hierbei handelt es sich um keine Termordnung, da $x_n <_{RevLex} \cdots <_{RevLex} x_1 <_{RevLex} 1$.

Definition 2.10 „Gradverträglichkeit"
Sei σ eine Monoidordnung auf $\mathbb{T}^n$. σ heißt gradverträglich*, falls für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{T}^n$ aus $\deg(\gamma_1) < \deg(\gamma_2)$ schon $\gamma_1 \leq_\sigma \gamma_2$ folgt.*

Bemerkung 2.11
Jede gradverträgliche Monoidordnung ist schon eine Termordnung. Dies folgt direkt aus $\deg(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}^n$ und $\deg(1) = 0$.

Aus einer beliebigen Monoidordnung auf $\mathbb{T}^n$ lässt sich leicht eine gradverträgliche Termordnung konstruieren.

Satz 2.12
Sei σ eine Monoidordnug auf $\mathbb{T}^n$. Die durch die Vorschrift

$$a \leq_\tau b \quad :\Leftrightarrow \quad \deg t_1 < \deg t_2 \text{ oder } (\deg t_1 = \deg t_2 \text{ und } t_1 \leq_\sigma t_2)$$

für $t_1, t_2 \in \mathbb{T}^n$ definierte Relation τ ist eine gradverträgliche Termordnung auf $\mathbb{T}^n$.

Beweis. Seien $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{T}^n$.

Falls $t_1 = t_2$, so gilt $t_1 \leq_\tau t_2$, da $\deg t_1 = \deg t_2$ und $t_1 \leq_\sigma t_2$ ist. τ ist somit reflexiv.

Gilt $\deg t_1 \neq \deg t_2$, so ist entweder $\deg t_1 < \deg t_2$ oder $\deg t_1 > \deg t_2$ und folglich entweder $t_1 \leq_\tau t_2$ oder $t_1 \geq_\tau t_2$, beides gleichzeitig kann jedoch nicht der Fall sein. Ist $\deg t_1 = \deg t_2$, so sind die Bedingungen für Vollständigkeit und Antisymmetrie wegen der jeweiligen Eigenschaften bei σ ebenfalls erfüllt.

Sei nun $t_1 \leq_\tau t_2$ und $t_2 \leq_\tau t_3$. In jedem Fall gilt wegen der Antisymmetrie von τ $\deg t_1 \leq \deg t_2$ und $\deg t_2 \leq \deg t_3$. Ist eine der beiden Ungleichungen strikt, so ist schon $t_1 \leq_\tau t_3$. Falls $\deg t_1 = \deg t_2 = \deg t_3$, so ist $t_1 \leq_\sigma t_2 \leq_\sigma t_3$ wegen der Transitivität von σ und folglich auch $t_1 \leq_\tau t_3$.

Sei nun $t_1 \leq_\tau t_2$ und t_3 beliebig. Falls $\deg t_1 < \deg t_2$, so ist auch

$$\deg(t_3 \cdot t_1) = \deg t_3 + \deg t_1 < \deg t_3 + \deg t_2 = \deg(t_3 \cdot t_2)$$

und somit $t_3 \cdot t_1 \leq_\tau t_3 \cdot t_2$. Falls $\deg t_1 = \deg t_2$ und somit auch $t_1 \leq_\sigma t_2$ gilt, so ist auch $\deg(t3 \cdot t_1) = \deg(t_3 \cdot t_2)$ und $t_3 \cdot t_1 \leq_\sigma t_3 \cdot t_2$. Auch hier folgt also $t_3 \cdot t_1 \leq_\tau t_3 \cdot t_2$. Somit ist τ verträglich mit der Multiplikation.

Da $\deg t_1 > 0$ genau dann gilt, wenn $t_1 \neq 1$, ist τ eine Termordnung. Die Gradverträglichkeit folgt direkt aus der Definition. $\square$

Beispiel 2.13 *DegLex, DegRevLex*
Die Relationen *DegLex* und *DegRevLex* sind definiert durch die Vorschriften

$$a \leq_{DegLex} b \quad :\Leftrightarrow \quad \deg t_1 < \deg t_2 \text{ oder } (\deg t_1 = \deg t_2 \text{ und } t_1 \leq_{Lex} t_2)$$

sowie

$$a \leq_{DegRevLex} b \quad :\Leftrightarrow \quad \deg t_1 < \deg t_2 \text{ oder } (\deg t_1 = \deg t_2 \text{ und } t_1 \leq_{RevLex} t_2)$$

für $t_1, t_2 \in \mathbb{T}^n$. Nach dem vorangegangenen Satz sind *DegLex* und *DegRevLex* gradverträgliche Termordnungen.

DegLex und *DegRevLex* lassen sich auch in der Form $Ord(V_{DegLex})$ bzw. $Ord(V_{DegRevLex})$ für Matrizen

$$V_{DegLex} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, V_{DegRevLex} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & . & . & 0 \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

darstellen.

Beispiel 2.14 *Elim(L)*
Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $L = \{1, \ldots, j\}$. Die Relation $Elim(L)$ ist definiert durch die Vorschrift

$$a \leq_{Elim(L)} \quad :\Leftrightarrow \quad a_1 + \ldots + a_j < b_1 + \ldots + b_j \text{ oder } a \leq_{DegRevLev} b$$

für $a, b \in \mathbb{N}^n$. $Elim(L)$ lässt sich auch darstellen als $Ord(V_{Elim(L)})$ für die Matrix

$$V_{Elim(L)} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & & & & . & . & . & 0 \\ \vdots & & & . & 0 & -1 & . & \vdots \\ \vdots & & . & -1 & 0 & . & & \vdots \\ \vdots & . & . & . & . & & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und ist somit eine gradverträgliche Termordnung auf $\mathbb{T}^n$.

$Elim(L)$ gehört zur Klasse der Eliminationsordnungen. Diese Bezeichnung kommt daher, dass in einer Menge von Termen $M \subseteq \mathbb{T}^n$ genau dann kein Term mit Unbestimmten aus $\{x_1, \ldots, x_n\}$ vorkommt, wenn der bzgl. $Elim(L)$ größte Term in M keine dieser Unbestimmten enthält.

Satz 2.15
Sei σ eine Monoidordnung auf $\mathbb{T}^n$ und $\mathbb{T}_i^{n-1}$ das Monoid aller Terme in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Sei σ_i die Einschränkung von σ auf $\mathbb{T}_i^{n-1}$.

1. *σ_i ist eine Monoidordnung auf $\mathbb{T}_i^{n-1}$.*
2. *Falls σ eine Termordnung ist, so ist auch σ_i eine Termordnung.*
3. *Gibt es eine Matrix $V \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $\sigma = Ord(V)$ und fassen wir σ_i als Ordnung auf $\mathbb{T}^{n-1}$ auf, so ist $\sigma_i = Ord(V_i)$, wobei V_i die Matrix ist, die aus V entsteht, wenn man zunächst die i-te Spalte und dann die erste Zeile löscht, die von den weiter oben stehenden Zeilen linear abhängig ist.*

Beweis. Da $\mathbb{T}_i^{n-1}$ ein Untermonoid von $\mathbb{T}^n$ ist, folgen die ersten beiden Behauptungen direkt aus der Definition einer Monoid- bzw. Termordnung.

Streichen wir die i-te Spalte aus V und die i-te Komponente aus $\log(t)$ für $t \in \mathbb{T}_i^{n-1}$, so ändert dies wegen $\log(t)_i = 0$ nichts am Ergebnis der Matrix-Vektor-Multiplikation. Ist die j-te Zeile der Matrix V nach Streichen der i-ten Spalte von den weiter oben stehenden linear abhängig, so ist $V_{j\cdot} \log(t_1) = V_{j\cdot} \log(t_2)$ für $t_1, t_2 \in \mathbb{T}_i^{n-1}$, falls $V_{k\cdot} \log(t_1) = V_{k\cdot} \log(t_2)$ für alle $k \in \{1, \ldots, j-1\}$. Sreichen der j-ten Zeile ändert also nichts am Ergebnis des Vergleichs mittel Lex. Es ist also $t_1 \leq_{Ord(V_i)} t_2$ genau dann, wenn $t_1 \leq_{Ord(V)} t_2$. □

Definition 2.16 Kürzungsregeln
Sei $(\Gamma, \circ)$ ein Monoid und $(\Sigma, *)$ ein Γ-Monomodul.

1. *Man sagt, die* Kürzungsregel *gilt in Γ, falls für alle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ aus $\gamma_3 \circ \gamma_1 = \gamma_3 \circ \gamma_2$ auch $\gamma_1 = \gamma_2$ folgt.*
2. *Man sagt, die* linke Kürzungsregel *gilt in Σ, falls für alle $\gamma \in \Gamma$ und alle $s_1, s_2 \in \Sigma$ aus $\gamma * s_1 = \gamma * s_2$ auch $s_1 = s_2$ folgt.*
3. *Man sagt, die* rechte Kürzungsregel *gilt in Σ, falls für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und alle $s \in \Sigma$ aus $\gamma_1 * s = \gamma_2 * s$ auch $\gamma_1 = \gamma_2$ folgt.*

Beispiel 2.17 Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Fasst man G als Monoid auf, so gilt in G und jedem Untermonoid von G die Kürzungsregel. Insbesondere gilt die Kürzungsregel in $\mathbb{N}^n \subset \mathbb{Z}^n$.

Sowohl linke als auch rechte Kürzungsregel gelten im Monomodul $\mathbb{T}^n \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$.

Satz 2.18
Sei σ eine Monoidordnung auf $\mathbb{N}^n$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Monoidordnung σ' auf $\mathbb{Z}^n$ mit $a \leq_\sigma b \Leftrightarrow a \leq_{\sigma'} b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}^n$.

Beweis. Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}^n$. Durch $x_i^+ := \max\{0, x_i\}, x_i^- := \max\{0, -x_i\}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ werden zwei Vektoren $x^+, x^- \in \mathbb{N}^n$ mit $x = x^+ - x^-$ definiert. Analog definieren wir $y^+, y^-, z^+, z^- \in \mathbb{N}^n$ mit $y = y^+ - y^-$ und $z = z^+ - z^-$. Wir setzen $x \leq_{\sigma'} y :\Leftrightarrow x^+ + y^- \leq_\sigma y^+ + x^-$. Für $x, y \in \mathbb{N}^n$ ist $x^- = y^- = 0$ und somit $x \leq_\sigma y \Leftrightarrow x \leq_{\sigma'} y$. Wegen der Verträglichkeit mit der Addition muss jede Erweiterung von σ die angegebene Vorschrift für alle $x, y \in \mathbb{Z}^n$ erfüllen. σ' ist somit eindeutig.

Die Reflexivität von σ' folgt direkt aus der Reflexivität von σ.

Sei nun $x^+ + y^- = y^+ + x^-$. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aus $x_i^+ > 0$ folgt $x_i^- = 0$ und damit wegen $y_i^+ = x_i^+ + y_i^- > 0$ auch $y_i^- = 0$. In diesem Fall ist also schon $x_i = y_i$. Analog folgt auch aus $y_i^+ > 0$ schon $x_i = y_i$. Ist aber $x_i^+ = y_i^+ = 0$, so folgt mit $y_i^- = x_i^-$ auch $x_i = y_i$. Es ist also $x^+ + y^- = y^+ + x^-$ genau dann, wenn $x = y$ und somit folgt die Antisymmetrie von σ' aus der von σ.

Sei nun $x \leq_{\sigma'} y$ und $y \leq_{\sigma'} z$. Aus $x^+ + y^- \leq_\sigma y^+ + x^-$ und $y^+ + z^- \leq_\sigma z^+ + y^-$ folgt $x^+ + y^- + y^+ + z^- \leq_\sigma z^+ + y^- + y^+ + x^-$. Wegen der Kürzungsregel in $\mathbb{N}^n$ ergibt sich $x^+ + z^- \leq_\sigma z^+ + x^-$ und somit $x \leq_{\sigma'} z$. σ' ist also transitiv. □

Wir wollen uns nun mit Ordnungen auf dem $\mathbb{T}^n$-Monomodul $\mathbb{T}\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ befassen.

Definition 2.19 „Modulordnung“, „Modultermordnung“
Sei $(\Gamma, \circ)$ *ein Monoid,* $(\Sigma, *)$ *ein* Γ*-Monomodul und* σ *eine Ordnung auf* Σ. σ *heißt* Modulordnung, *falls für alle* $s_1, s_2 \in \Sigma$ *und alle* $\gamma \in \Gamma$ *aus* $s_1 \leq_\sigma s_2$ $\gamma * s_1 \leq_\sigma \gamma * s_2$ *folgt.*

Falls zusätzlich gilt, dass für alle $s \in \Sigma$ *und alle* $\gamma \in \Gamma$ $s \leq_\sigma \gamma * s$ *ist, so heißt* σ Modultermordnung.

Ist τ *eine Monoidordnung auf* Γ, *so heißt* σ verträglich *mit* τ, *falls aus* $\gamma_1 \leq_\tau \gamma_2$ *für alle* $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ *und alle* $s \in \Sigma$ $\gamma_1 * s \leq_\sigma \gamma_2 * s$ *folgt.*

Beispiel 2.20 *ToPos, PosTo*
Sei $(\Gamma, \circ)$ ein Monoid und To eine Termordnung auf Γ. Durch die Vorschriften

$$\begin{aligned} t_1 e_i \leq_{ToPos} t_2 e_j \quad &:\Leftrightarrow \quad t_1 <_{To} t_2 \text{ oder } (t_1 = t_2 \text{ und } i \geq j) \text{ und} \\ t_1 e_i \leq_{PosTo} t_2 e_j \quad &:\Leftrightarrow \quad i > j \text{ oder } (i = j \text{ und } t_1 \leq_{To} t_2) \end{aligned}$$

für $t_1, t_2 \in \mathbb{T}^n$ und $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ werden die Relationen $ToPos$ und $PosTo$ auf $\mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ definiert. Es lässt sich zeigen, dass beide Modultermordnungen sind.

Zum Schluss wollen wir zeigen, dass die Termordnungen auf $\mathbb{T}^n$ bzw. dem Monomodul $\mathbb{T}^n$-Monomodul $\mathbb{T}\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ mit den Wohlordnungen auf diesen Mengen zusammenfallen (sofern diese auch die Multiplikation berücksichtigen).

Satz 2.21
Sei $(\Gamma, \circ)$ *ein Monoid,* $(\Sigma, *)$ *ein* Γ*-Monomodul und* σ *eine Modulordnung auf* Σ. *Ferner gelte in* Σ *die linke Kürzungsregel. Falls* σ *eine Wohlordnung ist, so ist* σ *eine Modultermordnung.*

Beweis. Angenommen, es gibt ein $\gamma \in \Gamma$ und ein $s \in \Sigma$ mit $\gamma * s <_\sigma s$. Wegen $\gamma \neq 1_\Gamma$ und der linken Kürzungsregel ist dann $\gamma^{i+1} * s \neq \gamma^i * s$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Aus der Verträglichkeit mit $*$ folgt dann $\gamma^{i+1} * s <_\sigma \gamma^i * s$ und die Elemente $\gamma^i * s$ bilden eine streng monoton fallende Folge in Σ, die insbesondere keine konstante Teilfolge besitzt. σ ist also keine Wohlordnung, falls σ keine Termordnung ist. $\square$

Satz 2.22 Fundamentaleigenschaft der Termordnungen
Sei σ eine Modulordnung auf $\mathbb{T}^n \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$. σ ist genau dann eine Modultermordnung, wenn σ eine Wohlordnung ist.

Beweis. Da in $\mathbb{T}^n \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ die linke Kürzungsregel erfüllt ist, genügt es zu zeigen, dass jede Modultermordnung eine Wohlordnung ist.

Sei σ eine Modultermordnung und $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{T}^n \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ mit $a_i = t_i e_{\gamma_i}$. Da (a_i) unendlich viele Glieder hat, es aber nur r Elemente e_i gibt, muss es für ein $k \in \{1, \ldots, r\}$ eine ebenfalls monoton fallende Teilfolge $(a_{\delta_i})_{i \in \mathbb{N}}$ geben mit $a_{\delta_i} = t_{\delta_i} e_k$. Das Monoideal $(t_{\delta_1}, t_{\delta_2}, \ldots)$ von $\mathbb{T}^n$ ist nach Dickson's Lemma endlich erzeugt. Folglich gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ $t_{\delta_i} \in (t_{\delta_1}, \ldots, t_{\delta_N})$ gilt, d. h. $t_{\delta_i} = s t_{\delta_j}$ für ein $s \in \mathbb{T}^n$ und ein $j \in \{1, \ldots, N\}$. Da σ eine Modultermordnung ist, folgt $t_{\delta_i} = s t_{\delta_j} \geq_\sigma t_{\delta_j}$. Für $j < i$ ergibt sich wegen der Monotonie von (a_i) damit Gleichheit aller Folgeglieder spätestens ab dem Index δ_j, d. h. die Folge besitzt eine konstante Teilfolge. $\square$