Prof. Dr. Martin Kreuzer

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Anwendungen der Computeralgebra“

Blatt 1

Im Folgenden sei K ein Körper und $P = K[x_1, \ldots, x_n]$.

Aufgabe 1 (Einatmung und Ausatmung — eine fundamentale Syzygie)

a) Seien $t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{T}^n$. Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `MonSyz` (T), die als Eingabe die Liste $T = [t_1, \ldots, t_s]$ verwendet und die Liste der fundamentalen Syzygien $[\sigma_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq s]$ ausgibt, wobei $\sigma_{ij} = t_{ij}e_i - t_{ji}e_j \in P^s$ und $t_{ij} = \mathrm{kgV}(t_i, t_j)/t_i$ gelte.

b) Berechnen Sie die Syzygienmoduln der folgenden Tupel:

1) $[x^{34}y^7, x^{23}y^{19}]$ über $\mathbb{T}^2$
2) $[xy, yz, xz]$ über $\mathbb{T}^3$
3) $[{x_1}^2, x_1x_2, \ldots, x_1x_5, {x_2}^2, x_2x_3, \ldots, {x_5}^2]$ über $\mathbb{T}^5$

Aufgabe 2 (Das Verständnis der Interaktion von $+$ und $\times$ ist Ideal [Bruno Buchberger])
Sei $F = [f_1, \ldots, f_s]$ eine Liste von Polynomen in $P \setminus \{0\}$ und $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ das davon erzeugte Ideal.

a) Implementieren Sie eine CoCoA–Funktion `CheckGB` (F), die mit Hilfe des Buchberger–Kriteriums entscheidet, ob F eine Gröbner–Basis von I bzgl. der gegebenen Termordnung darstellt oder nicht und die den entsprechenden Boolschen Wert ausgibt.
[Tipp: Verwenden Sie den eingebauten Befehl `NR` $(\ldots)$.]

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Listen Gröbner–Basen definieren:

1) $[x^2, xy + y^2, y^3]$ bzgl. $\sigma = \mathrm{Lex}$
2) $[x^2y - 1, xy^2 - x]$ bzgl. $\sigma = \mathrm{DegRevLex}$
3) $[xy^2 - xz + y, xy - z^2, x - yz^4]$ bzgl. $\sigma = \mathrm{Lex}$
4) $[x^4y^2 - z^5, x^3y^3 - 1, x^2y^4 - 2z]$ bzgl. $\sigma = \mathrm{DegLex}$
5) $[x_1x_3 - {x_2}^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - {x_3}^2]$ bzgl. $\sigma = \mathrm{DegRevLex}$

Aufgabe 3 (Bigamie ist wenn man einmal zu oft heiratet. Monogamie ist dasselbe.)
Ein Polynom $f \in P$ heißt **Binom**, wenn es von der Form $f = a_1t_1 + a_2t_2$ mit $a_1, a_2 \in K \setminus \{0\}$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{T}^n$ ist. Seien $f_1, \ldots, f_s \in P$ Binome und sei $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ das von ihnen erzeugte **binomische Ideal**. Ferner sei σ eine Termordnung auf $\mathbb{T}^n$.

a) Beweisen Sie, dass die reduzierte σ–Gröbner–Basis von I aus Binomen besteht.

b) Zeigen Sie, dass für jeden Term $t \in \mathbb{T}^n$ die Normalform $\mathrm{NF}_{\sigma,I}(t)$ ein skalares Vielfaches eines Terms ist.

Aufgabe 4 (Fun für Fans von Gröbner–Fans)
Gegeben sei das Ideal $I = \langle xy - z^2, xz - z^2, yz - z^2 \rangle$ in $P = K[x, y, z]$. Zeigen Sie:

a) Ist σ eine Termordnung mit den angegebeben Eigenschaften, so besitzt I die behauptete reduzierte σ–Gröbner–Basis:

   1) $G_1 = \{xz - z^2, yz - z^2, xy - z^2\}$ falls $x >_\sigma z$ und $y >_\sigma z$.
   2) $G_2 = \{xy - yz, xz - yz, z^2 - yz\}$ falls $x >_\sigma z$ und $z >_\sigma y$.
   3) $G_3 = \{z^2 - xz, yz - xz, xy - xz\}$ falls $z >_\sigma x$ und $y >_\sigma z$.
   4) $G_4 = \{xz - xy, yz - xy, z^2 - xy, x^2y - xy^2\}$ falls $z >_\sigma x$ und $x >_\sigma y$.
   5) $G_5 = \{xz - xy, yz - xy, z^2 - xy, xy^2 - x^2y\}$ falls $z >_\sigma y$ und $y >_\sigma x$.

   Folglich besitzt I genau fünf reduzierte Gröbner–Basen.

b) Beschreiben Sie alle Termordnungen $\sigma = \operatorname{Ord}(M)$ mit $M \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{Z})$ die zu jeder der Gröbner–Basen G_i führen an Hand der Matrix M. Interpretieren sie damit das Titelbild von „Computatorial Commutative Algebra 1“.

Aufgabe 5 (Eliminate the eliminators of elimination theory)
Berechnen Sie von Hand oder mit Hilfe von CoCoA die Verschwindungsideale der folgenden Kurven und Flächen.

a) $C_1 = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{Q}\}$ (Getwistete kubische Raumkurve)

b) $C_2 = \left\{ \left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1} \right) \;\middle|\; t \in \mathbb{Q} \right\}$ (Folium von Descartes)

c) $S_1 = \{(s + t, s^2 + 2st, s^3 + 3s^2t) \mid s, t \in \mathbb{Q}\}$ (Tangentenfläche der getwisteten kubischen Raumkurve)

d) $S_2 = \{(s^3 - 3st^2 - 3s, t^3 - 3s^2t - 3t, 3s^2 - 3t^2) \mid s, t \in \mathbb{Q}\}$ (Enneper–Fläche)

e) $S_3 = \{(s, st, t^2) \mid s, t \in \mathbb{Q}\}$ (Whitneys Regenschirm)

f) $S_4 = \{(s, t, s^2, st, t^2) \mid s, t \in \mathbb{Q}\}$ (Veronese Fläche)

Falls möglich, versuchen Sie die Kurven und Flächen auch graphisch darzustellen.