Prof. Dr. Martin Kreuzer

Übungsaufgaben zur Vorlesung „Anwendungen der Computeralgebra“

Blatt 2

Im Folgenden sei K ein Körper und $P = K[x_1, \ldots, x_n]$.

Aufgabe 6 („Was ist eine ideale Beziehung?“
„Wenn man zwei zusammenfügt und sie sich multiplizieren!“)

a) Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `RelIdeal` (F), die zu einer vorgegebenen Liste von Polynomen $F = [f_1, \ldots, f_s]$ aus $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ einen Polynomring $R = K[y_1, \ldots, y_s]$ definiert, darin das Ideal der algebraischen Relationen

$$\operatorname{Rel}(f_1, \ldots, f_s) = \{g \in R \mid g(f_1, \ldots, f_s) = 0\}$$

berechnet und dieses ausgibt.

b) Wenden Sie Ihre Funktion `RelIdeal` (F) an, um die Verschwindungsideale aus Aufgabe 5 zu berechnen.

Aufgabe 7 („Sind Sie satt? Hat es geschmeckt?“ „Danke, mir reicht's!“)
Seien K ein Körper, $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ und $I, J \subseteq P$ zwei Ideale.

a) Beweisen Sie, dass $I : J^\infty = \{f \in P \mid f \cdot J^i \subseteq I$ für ein $i \geq 1\}$ ein Ideal von P ist. Es heißt die **Saturierung** von I bzgl. J.

b) Sei $\{f_1, \ldots, f_s\} \subseteq P \setminus \{0\}$ ein Erzeugendensystem von J. Zeigen Sie $I : J^\infty = \bigcap_{i=1}^{s} I : f_i^\infty$.

c) Sei $f \in P \setminus \{0\}$ und y eine Tag–Variable. Beweisen Sie, dass man $I : f^\infty$ berechnen kann mittels der Formel $I : f^\infty = \langle yg_1, \ldots, yg_s, 1 - fy \rangle \cap P$, wenn $I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ gilt.

Aufgabe 8 („Du hast einen vollkommenen Körper“ „In welcher Charakteristik?“)
Sei K ein vollkommener Körper der Charakteristik $p > 0$.

a) Zeigen Sie, dass für ein Polynom $f \in K[x]$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

   (1) $f' = 0$.

   (2) Es gibt ein $g \in K[x]$ mit $f = g^p$.

   (3) Das Polynom f ist von der Form $f = a_0 + a_p x^p + a_{2p} x^{2p} + \ldots + a_{dp} x^{dp}$ mit $a_0, \ldots, a_{dp} \in K$.

b) Sei nun $K = \mathbb{F}_p$. Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `IsPPower` $(\ldots)$, die für ein Polynom $f \in \mathbb{F}_p[x]$ prüft, ob es eine p–te Potenz ist und den entsprechenden Boolschen Wert ausgibt.

c) Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `PRoot` $(\ldots)$, die ein Polynom $f \in \mathbb{F}_p[x]$ der Form $f = g^p$ nimmt und das zugehörige Polynom g berechnet.

Aufgabe 9 („Welches Zitat gefällt Ihnen am besten?“
„Das Zitat »Ich hasse Zitate« von Ralph Waldo Emerson“)

Sei $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynomring über einen Körper K, sei $R = K[f_1, \ldots, f_m] \subseteq P$ eine endlich erzeugte K–Unteralgebra mit $f_1, \ldots, f_m \in P$, und sei $I \subset P$ ein Ideal.

a) Beweisen Sie, dass man eine Präsentation von $R/(I \cap R)$ wie folgt berechnen kann:
Sei $Q = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ und sei $J = \langle y_1 - f_1, \ldots, y_m - f_m \rangle + IQ \subseteq Q$. Dann gilt

$$R/(I \cap R) \cong K[y_1, \ldots, y_m] / (J \cap K[y_1, \ldots, y_m]).$$

b) Wie kann man ein Erzeugendensystem des Ideals $I \cap R$ von R berechnen? Schreiben Sie eine CoCoA–Funktion `SubAlgIdeal` (F, I), die die Liste $F = [f_1, \ldots, f_m]$ und das Ideal I als Input erwartet und den Schnitt $I \cap R$ berechnent.