Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 26.04.2007, 14.00h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II für Lehramt Gymnasium

SS 2007 Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Hohe Potenzen ganz ohne Viagra

a) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine beliebige diagonalisierbare Matrix. Erfinden Sie ein geschicktes Verfahren, um A^m für beliebig große m zu berechnen!

b) Sei nun $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$. Wenden Sie ihr Verfahren an, um A^{100} zu berechnen!

Aufgabe 2 Was ist klein, grün und dreieckig?

Zeigen Sie mit Induktion nach $n = \dim V$: Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus, so existiert eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(eine sogenannte echte obere Dreiecksmatrix)!

Aufgabe 3 Trigonalisieren = Matrizen in obere Drecksform bringen

Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen trigonalisierbar sind und geben Sie gegebenenfalls eine Transformationsmatrix an:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_5)!$$

Aufgabe 4 Bei Nebenwirkungen jagen Sie Ihren Arzt zum Apotheker

Es sei bekannt, dass man jedes Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $\deg(p) \geq 1$ darstellen kann in der Form $p = c \cdot \ell_1 \cdots \ell_k \cdot q_1 \cdots q_m$ mit $c \in \mathbb{R}$, $\ell_i, q_j \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(\ell_i) = 1$, $\deg(q_j) = 2$ und q_j ohne Nullstelle.

a) Beweisen Sie, dass es für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ einen f-invarianten Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $\dim_{\mathbb{R}}(U) \leq 2$.

b) Zeigen Sie, dass es eine Basis B von $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass $M_B(f)$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_k & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & Q_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & Q_m \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ besitzt, wobei Q_i die Matrix einer Drehstreckung in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 5 Garbage in, Eigenwerte out!

a) Implementieren Sie eine CoCoA-Funktion `EigenwertSystem(A)`, die als Eingabe eine quadratische Matrix A erwartet und eine Liste von Paaren ausgibt, wobei der erste Eintrag jeweils einen Eigenwert der Matrix und der zweite seine Vielfachheit enthält!

b) Berechnen Sie mit dieser Funktion die Eigenwerte und ihre Vielfachheiten von

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})$$

2)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$