Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 24.05.2007, 14.00h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II für Lehramt Gymnasium
SS 2007 Übungsblatt 5

Aufgabe 1 Eine Drehung zum schwindlig Rechnen

a) Welche Gestalt hat eine Matrix, die eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ um den Drehwinkel φ um einen beliebigen Vektor (Drehachse) $q = (q_1, q_2, q_3)$ mit $\|q\| = 1$ bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ beschreibt?

Tipp: Bestimmen Sie zunächst eine Orthonormalbasis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ des $\mathbb{R}^3$, so dass $v_3 = (q_1, q_2, q_3)$ die Drehachse erzeugt! Um geeignete Vektoren v_1 und v_2 zu finden, zeigen Sie $\langle(q_1, q_2, q_3)\rangle^\perp = \langle(-q_2, q_1, 0), (-q_3, 0, q_1), (0, -q_3, q_2)\rangle$!
Stellen Sie dann die Matrix der Drehung bzgl. der Basis B auf und verwenden Sie die Transformationsformel!

b) Überprüfen Sie, ob der Vektor q unverändert bleibt!

Aufgabe 2 Die Lösung dieser Aufgabe ist ein Einzeiler - wenn man weit genug links anfängt

Zeigen Sie, dass die Menge der symmetrischen Matrizen aus $\mathrm{Mat}_n(K)$ einen K-Vektorraum bilden! Bestimmen Sie außerdem die Dimension und eine Basis dieses Vektorraums!

Aufgabe 3 Was sagt die Null zur Acht? „Netter Gürtel!“

Sei $n \geq 2$.

a) Zeigen Sie, dass durch $\| \ \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\|(a_1, ..., a_n)\|_\infty := \max\{|a_i| : 1 \leq i \leq n\}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird!

b) Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt ϕ auf $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\|v\|_\infty = \sqrt{\phi(v, v)}$ für $v \in \mathbb{R}^n$ (d.h. nicht jede Norm entsteht aus einem Skalarprodukt)!

Tipp: Verwenden Sie die Parallelogrammgleichung!

Aufgabe 4 Klein φ macht auch Mist!

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ und $\varphi : V \to \mathbb{R}$ linear. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Vektor $v \in V$ gibt, so dass $\varphi(x) = \phi(x, v)$ für alle $x \in V$!

Aufgabe 5 Schmidtchen, ist das schön, mit dir zu schleichen!

a) Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 1)$ und $v_3 = (-1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$. Es ist $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Konstruieren Sie aus B_1 mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis B_2!

b) Sei V ein euklidischer Vektorraum und $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Wie kann man einen Vektor $w \in V$ als Linearkombination der Vektoren der Basis B darstellen? Finden Sie eine Methode, die nur auf der Berechnung von Skalarprodukten beruht und beweisen Sie ihre Richtigkeit!
Stellen Sie mit dieser Methode den Vektor $w = (2, -1, 1)$ als Linearkombination der in a) berechneten Orthonomalbasisvektoren dar!