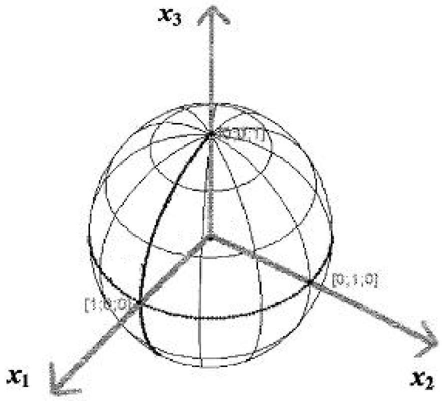
Geometrie mit POV-Ray

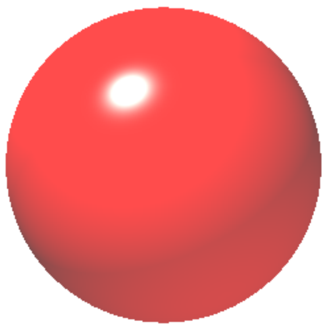
- platonische Körper und dichteste Kugelpackungen -



Gegeben ist der Punkt M(0|-1|0) im Raum.

a) Welchen Radius hat eine Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung (0|0|0), auf deren Oberfläche der Punkt M liegt?

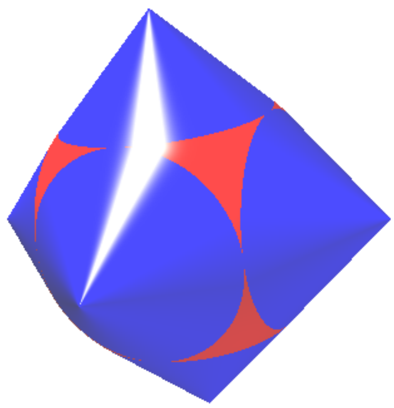
b) Erzeugen Sie mit dem 3D-Programm POV-Ray[1] die zu a) gehörende Kugel. Verwenden Sie dazu die Basisdatei `basis.pov` und den Befehl `sphere{}`.



c) M' entsteht durch Punktspiegelung von M am Ursprung. Geben Sie die Koordinaten von M' an.

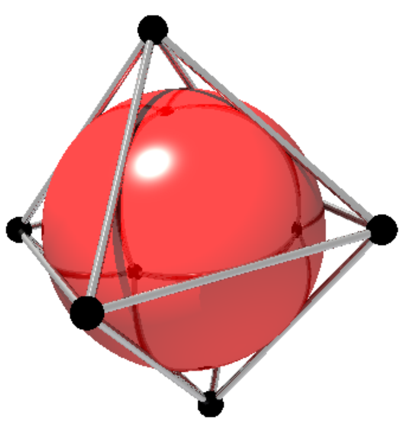
d) Die Tangenten von M' an eine Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius r = 1 bilden einen geraden Kegel, dessen Grundfläche durch die Berührpunkte festgelegt wird.
Wählen Sie eine geeignete Schnittebene und fertigen Sie eine maßstabsgetreue Zeichnung der Situation an.

e) Begründen Sie, warum man den Berührkreis als Schnitt der Kugel K mit einer Kugel um den Ursprung von gleichem Radius r = 1 erhält.



f) Berechnen Sie Mantelfläche und Volumen des Kegels.

g) Der Kugel K sollen nun 6 identische Kegelhütchen so aufgesetzt werden, dass sie die Kugeloberfläche bestmöglich bedecken. Geben Sie den Radius r_H der Grundfläche dieser Kegel an.



h) Visualisieren Sie den Körper aus Teilaufgabe g) mittels POV-Ray, indem Sie zusätzlich den Befehl `cone{}` für Kegel geeignet verwenden.

i) Die Mantellinien der Kegelhütchen sollen nun zusätzlich Tangenten an die Kugel sein. Geben Sie die Länge der Mantellinien an.

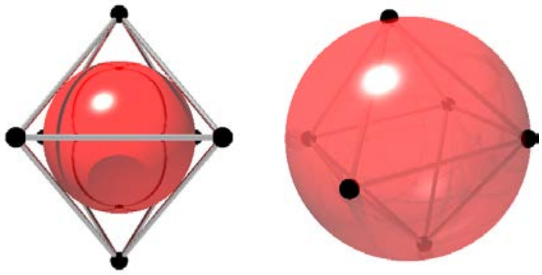
j) Es seien $S_1, S_2, \ldots S_6$ die Spitzen der 6 Kegelhütchen aus Teilaufgabe g). Welcher Körper entsteht durch eine geradlinige Verbindung der 6 Spitzen?

k) Erzeugen Sie den Körper $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$ aus Teilaufgabe j) mit POV-Ray, indem Sie ihn der Kugel aus Teilaufgabe b) umschreiben. Verwenden Sie dazu die Befehle `cylinder{}` und `sphere{}`.

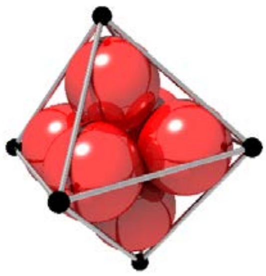
l) Geben Sie den Radius der Kugel an, die

(i) die Seitenflächen des Körpers $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$ von innen berührt.

(ii) die Ecken des Körpers $S_1S_2S_3S_4S_5S_6$ berührt.



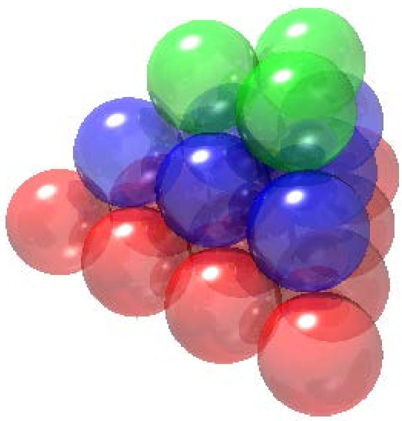
m) Visualisieren Sie die Situationen in Teilaufgabe l) mittels POV-Ray.



n) Das Oktaeder-Gitter soll nun durch 6 kleine Kugeln mit gleichem Radius bestmöglich ausgefüllt werden. Geben Sie deren Mittelpunkte und Radius an.

o) Führen Sie sich die Konstellation in Teilaufgabe n) mittels POV-Ray vor Augen. *(Tipp: ermitteln Sie die Koordinaten der Kugelmittelpunkte aus den Koordinaten der Oktaederecken.)*

p) Die Frage nach einer „dichtesten Kugelpackung“ (z.B. Orangen in einer Kiste) wurde erst 1998 von dem Mathematiker Thomas Hales mit Hilfe eines Computers bewiesen. Er zeigte hierbei, dass die „Keplersche Vermutung“ richtig ist.
Recherchieren Sie dazu im Internet und präsentieren Sie ihre Ergebnisse der Klasse.



q) Stellen Sie einen Ausschnitt einer dichtesten Kugelpackung mittels POV-Ray dar.

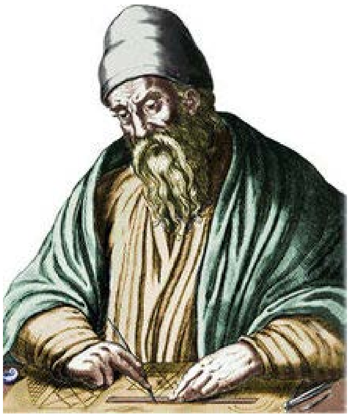
r) Der Oktaeder ist ein Platonischer Körper. Recherchieren Sie z.B. im Internet, was man darunter versteht. Wie viele Platonische Körper gibt es? Vollziehen Sie dazu die Argumentation von Euklid in den berühmten Elementen (Buch XIII) aus dem 4. Jh. v. Chr. nach:

(§ 18a).

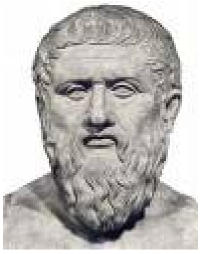
Weiter behaupte ich, dass sich außer den besprochenen Fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst würde.
Aus 2 Dreiecken oder überhaupt ebenen Flächen lässt sich keine Ecke errichten; aus 3 Dreiecken die der Pyramide, aus 4 die des Oktaeders, aus 5 die des Ikosaeders. Eine Ecke aus 6 gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecken, die an einem Punkt zusammengesetzt wären, kann es nicht geben; denn da der Winkel des gleichseitigen Dreiecks 2/3 R. beträgt, würden die 6 zusammen = 4 R.; dies ist unmöglich, denn jede Ecke wird von Winkeln umfasst, die zusammen < 4 R. (XI, 21). Aus demselben Grunde lässt sich auch aus mehr als 6 (solchen) ebenen Winkeln keine Ecke errichten. Von 3 Quadraten

wird die Würfelecke umfasst; mit 4 ist es unmöglich, denn sie gäben wieder 4 R. Bei gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken wird von 3 die Dodekaederecke umfasst. Mit 4 ist es unmöglich; denn da der Winkel des gleichseitigen Fünfecks 1 1/5 R. beträgt, würden die 4 Winkel zusammen > 4 R.; dies ist unmöglich. Wegen desselben Widerspruchs kann auch von anderen Vielecken keine (verwendbare) Ecke umfasst werden.

(Quelle: Euclides: Die Elemente: Bücher I – XIII / von Euklid. Aus dem Griech. übers. und hrsg. von Clemens Thaer und einem Vorw. von W. Trageser. – Reprint, 2. Aufl. – Thun; Frankfurt am Main: Deutsch, 1996, S. 412/413; Bildquelle: Fantasieporträt von Euklid bei Wikipedia)



s) Wolfgang Trageser schreibt in seiner Einleitung zur deutschen Übersetzung von Euklids Elementen durch Clemens Thaer (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1996) im November 1995:

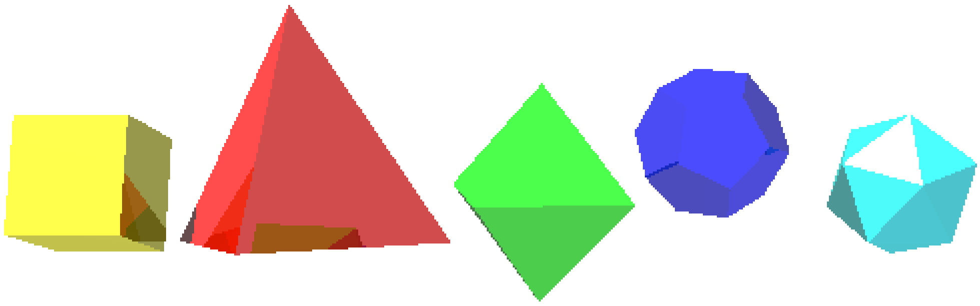


„Mit den dreizehn Büchern der „Elemente" des hellenistischen Mathematikers Euklid von Alexandria (365? Bis 300? v. Chr.) tritt uns das erfolgreichste Werk der mathematischen Weltliteratur entgegen. In meisterhafter Darstellung vereinigte und systematisierte Euklid das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit mit Ausnahme der Anwendungen der Mathematik; dies deswegen, da er vermutlich der Philosophie Platons nahegestanden hat."

Setzen Sie sich mit Platons Sicht der Geometrie im Siebenten Buch seiner Schrift „Der Staat" (*politeia*) auseinander (-> Arbeitsblatt) und erklären Sie Tragesers letztes Argument.

t) Finden Sie heraus, was man unter der Eulerschen Polyederformel versteht. Erstellen Sie eine Tabelle mit Namen, Ecken-, Kanten- und Flächenzahl der fünf Platonischen Körper, die die Eulerschen Polyederformel veranschaulicht bzw. bestätigt.

u) Verwenden Sie POV-Ray, um verschiedene Platonische Körper darzustellen. *(Tipp: die in* `basis.pov` *bereits geladene Bibliothek* „`shapes2.inc`" *enthält bereits „fertige" Körper mit Namen* `Tetrahedron, Cube, Octahedron, Dodecahedron, Icosahedron`*.)*



[1] Das Programm POV-Ray kann kostenlos von der POV-Ray-Homepage http://www.povray.org/ herunter-geladen werden. Eine deutsche Einführung zu dieser Software finden Sie z.B. auf den Seiten von Prof. A. Filler (http://www.math.hu-berlin.de/~filler/3D/index.html), bei Wikipedia (http://de.wikibooks.org/wiki/Raytracing_mit_POV-Ray) oder auf der Homepage von Andrea u. Friedrich Lohmüller (http://www.f-lohmueller.de/pov_tut/pov__ger.htm).