Puzzle-Mathematik

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung "Unterhaltungsmathematik"

Universität Passau, 18.12.2013

Inhaltsübersicht

Inhaltsübersicht

1. Licht aus!

Inhaltsübersicht

1. **Licht aus!**

2. **Schiebepuzzles**

Inhaltsübersicht

1. **Licht aus!**
2. **Schiebepuzzles**
3. **2-D Drehpuzzles**

Inhaltsübersicht

1. **Licht aus!**
2. **Schiebepuzzles**
3. **2-D Drehpuzzles**
4. **3-D Drehpuzzles**

Inhaltsübersicht

1. Licht aus!
2. Schiebepuzzles
3. 2-D Drehpuzzles
4. 3-D Drehpuzzles
5. Rubiks Uhr

Inhaltsübersicht

1. Licht aus!
2. Schiebepuzzles
3. 2-D Drehpuzzles
4. 3-D Drehpuzzles
5. Rubiks Uhr
6. Gray Code Puzzles

1 – Licht aus!

Der Mond ist nützlicher als die Sonne.

1 – Licht aus!

Der Mond ist nützlicher als die Sonne.
Weil man in der Nacht das Licht dringender braucht.
(Mullah Nasruddin)

1 – Licht aus!

Der Mond ist nützlicher als die Sonne.
Weil man in der Nacht das Licht dringender braucht.
(Mullah Nasruddin)

Lights Out! Spielregeln

Lights Out! Spielregeln

(1) Drückt man eine Taste, so wechselt der Ein/Aus-Zustand dieses Felds und der waagrecht und senkrecht direkt benachbarten Felder.

Lights Out! Spielregeln

(1) Drückt man eine Taste, so wechselt der Ein/Aus-Zustand dieses Felds und der waagrecht und senkrecht direkt benachbarten Felder.

(2) Für jedes Level gibt der Computer eine gewisse Lichteranordnung vor. (Es gibt 50 eingebaute Levels.)

Lights Out! Spielregeln

(1) Drückt man eine Taste, so wechselt der Ein/Aus-Zustand dieses Felds und der waagrecht und senkrecht direkt benachbarten Felder.

(2) Für jedes Level gibt der Computer eine gewisse Lichteranordnung vor. (Es gibt 50 eingebaute Levels.)

(3) Das **Ziel** des Spiel ist, alle Lichter auszuschalten.

Lights Out! Spielregeln

(1) Drückt man eine Taste, so wechselt der Ein/Aus-Zustand dieses Felds und der waagrecht und senkrecht direkt benachbarten Felder.

(2) Für jedes Level gibt der Computer eine gewisse Lichteranordnung vor. (Es gibt 50 eingebaute Levels.)

(3) Das **Ziel** des Spiel ist, alle Lichter auszuschalten.

Mathematische Modellierung

Gib die Stellung durch eine 0/1 - Matrix an. Der (i, j)-Eintrag sei x_{ij}.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mathematische Modellierung

Gib die Stellung durch eine 0/1 - Matrix an. Der (i, j)-Eintrag sei x_{ij}.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Drücken einer Taste entspricht der Addition einer bestimmten Matrix **modulo 2**, d.h. man addiert über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beispiel: Das Drücken der Taste $(4, 2)$ entspricht der Addition

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Das Drücken der Taste $(4, 2)$ entspricht der Addition

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei A_{ij} die 0/1 - Matrix, deren Addition dem Drücken der Taste (i, j) entspricht.

Beispiel: Das Drücken der Taste $(4,2)$ entspricht der Addition

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei A_{ij} die 0/1 - Matrix, deren Addition dem Drücken der Taste (i,j) entspricht. Wenn S die gegebene Stellung ist und N die Nullmatrix, so sucht man also $y_{ij} \in \{0,1\}$ mit

$$S + y_{11}A_{11} + y_{12}A_{12} + \cdots + y_{55}A_{55} = N$$

Beispiel: Das Drücken der Taste $(4,2)$ entspricht der Addition

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei A_{ij} die 0/1 - Matrix, deren Addition dem Drücken der Taste (i,j) entspricht. Wenn S die gegebene Stellung ist und N die Nullmatrix, so sucht man also $y_{ij} \in \{0,1\}$ mit

$$S + y_{11}A_{11} + y_{12}A_{12} + \cdots + y_{55}A_{55} = N$$

Die (i,j) mit $y_{ij} = 1$ ergeben die Tasten, die man drücken muss um das Puzzle zu lösen.

Fazit

Um die klassische Version von **Lights Out!** optimal zu lösen, muss man ein lineares Gleichungssystem von 25 Gleichungen in 25 Unbestimmten über dem Körper $\mathbb{F}_2$ lösen.

Fazit

Um die klassische Version von **Lights Out!** optimal zu lösen, muss man ein lineares Gleichungssystem von 25 Gleichungen in 25 Unbestimmten über dem Körper $\mathbb{F}_2$ lösen.

Varianten:

Lights Out Mini

Lights Out 2000

Bei **Lights Out Mini** hat die Stellung keine Kanten – die rechte und linke Spalte werden als benachbart betrachtet, ebenso wie die erste und letzte Zeite. Zum Beispiel gilt also

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei **Lights Out Mini** hat die Stellung keine Kanten – die rechte und linke Spalte werden als benachbart betrachtet, ebenso wie die erste und letzte Zeite. Zum Beispiel gilt also

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei **Lights Out 2000** haben die Felder jeweils drei mögliche Zustände: aus, rot oder grün. Ein Tastendruck bewirkt einen Übergang **aus** $\to$ **rot** $\to$ **grün** $\to$ **aus**.

Bei **Lights Out Mini** hat die Stellung keine Kanten – die rechte und linke Spalte werden als benachbart betrachtet, ebenso wie die erste und letzte Zeite. Zum Beispiel gilt also

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei **Lights Out 2000** haben die Felder jeweils drei mögliche Zustände: aus, rot oder grün. Ein Tastendruck bewirkt einen Übergang **aus** $\to$ **rot** $\to$ **grün** $\to$ **aus**.

Man muss hier also über dem Körper $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ lineare Gleichungen lösen!

Lights Out Deluxe

Orbix

Lights Out Deluxe

Orbix

Bei **Lights Out Deluxe** spielt man auf einem 6×6 Tastenfeld.

Lights Out Deluxe

Orbix

Bei **Lights Out Deluxe** spielt man auf einem 6×6 Tastenfeld.

Bei dem Spiel **Orbix** spielt man mit 12 kreisförmigen Tasten, die auf einer Kugel symmetrisch (wie die Seitenflächen eines Dodekaeders) angeordnet sind.

Lights Out Deluxe

Orbix

Bei **Lights Out Deluxe** spielt man auf einem 6×6 Tastenfeld.

Bei dem Spiel **Orbix** spielt man mit 12 kreisförmigen Tasten, die auf einer Kugel symmetrisch (wie die Seitenflächen eines Dodekaeders) angeordnet sind. Es gibt verschiedene Spielmodi. Im **Modus 1** wechseln immer die 5 an die gedrückte Taste anliegenden Felder den Ein/Aus-Zustand.

2 – Schiebepuzzles

Stell' Dir vor, ich habe das Puzzle schon nach einem Monat gelöst!

Na und?

2 – Schiebepuzzles

Stell' Dir vor, ich habe das Puzzle
schon nach einem Monat gelöst!
Na und?
Auf der Schachtel stand: 3-6 Jahre !

2 – Schiebepuzzles

Stell' Dir vor, ich habe das Puzzle
schon nach einem Monat gelöst!
Na und?
Auf der Schachtel stand: 3-6 Jahre !

Ein **Schiebepuzzle** ist eine spezielle Art von **Permutationspuzzle** bei dem ein oder mehrere Felder bzw. Positionen unbesetzt sind. Das berühmteste ist das ca. 1874 erfundene **14-15 Puzzle**.

2 – Schiebepuzzles

Stell' Dir vor, ich habe das Puzzle
schon nach einem Monat gelöst!
Na und?
Auf der Schachtel stand: 3-6 Jahre !

Ein **Schiebepuzzle** ist eine spezielle Art von **Permutationspuzzle** bei dem ein oder mehrere Felder bzw. Positionen unbesetzt sind. Das berühmteste ist das ca. 1874 erfundene **14-15 Puzzle**.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Aufgabe: Durch Verschieben der Puzzleteile bringe die Zahlen 14 und 15 in die richtige Reihenfolge!

Aufgabe: Durch Verschieben der Puzzleteile bringe die Zahlen 14 und 15 in die richtige Reihenfolge!

Auf Grund eines ausgesetzten Preisgelds von **1000 $** führte diese Aufgabe zur ersten weltweiten **Puzzlemanie** im Jahr 1880.

Aufgabe: Durch Verschieben der Puzzleteile bringe die Zahlen 14 und 15 in die richtige Reihenfolge!

Auf Grund eines ausgesetzten Preisgelds von **1000 $** führte diese Aufgabe zur ersten weltweiten **Puzzlemanie** im Jahr 1880.

Unmöglichkeitsbeweis: **(1)** Jede Folge von Zügen, an deren Anfang und Ende das leere Feld rechts unten ist, stellt eine **Permutation** der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 15$ dar.

Aufgabe: Durch Verschieben der Puzzleteile bringe die Zahlen 14 und 15 in die richtige Reihenfolge!

Auf Grund eines ausgesetzten Preisgelds von **1000 $** führte diese Aufgabe zur ersten weltweiten **Puzzlemanie** im Jahr 1880.

Unmöglichkeitsbeweis: **(1)** Jede Folge von Zügen, an deren Anfang und Ende das leere Feld rechts unten ist, stellt eine **Permutation** der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 15$ dar.

(2) Jede solche Folge von Zügen besteht aus einer **geraden** Anzahl von Zügen. Wenn man nämlich das 4×4 Feld wie ein Schachbrett färbt, wechselt das leere Feld bei jedem Zug die Farbe.

(3) Geben wir dem leeren Feld die Nummer **16**, so ist jeder Zug eine **Transposition**.

(3) Geben wir dem leeren Feld die Nummer **16**, so ist jeder Zug eine **Transposition**.

(4) Jede Folge von Zügen, die die Zahl 16 fest lässt, besteht aus einer geraden Anzahl von Transpositionen, ist also eine **gerade Permutation**.

(3) Geben wir dem leeren Feld die Nummer **16**, so ist jeder Zug eine **Transposition**.

(4) Jede Folge von Zügen, die die Zahl 16 fest lässt, besteht aus einer geraden Anzahl von Transpositionen, ist also eine **gerade Permutation**.

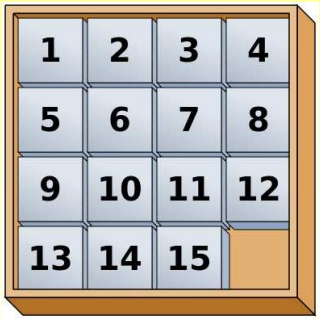
(5) Die gesuchte Lösung, also die Vertauschung $14 \leftrightarrow 15$ ist eine **ungerade Permutation**. Also ist die Aufgabe **nicht lösbar**.

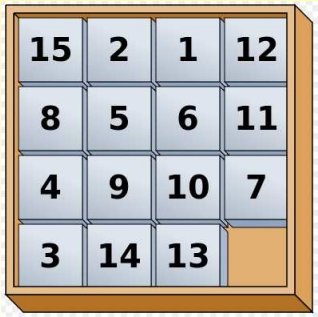
(3) Geben wir dem leeren Feld die Nummer **16**, so ist jeder Zug eine **Transposition**.

(4) Jede Folge von Zügen, die die Zahl 16 fest lässt, besteht aus einer geraden Anzahl von Transpositionen, ist also eine **gerade Permutation**.

(5) Die gesuchte Lösung, also die Vertauschung $14 \leftrightarrow 15$ ist eine **ungerade Permutation**. Also ist die Aufgabe **nicht lösbar**.

Das moderne 15-Puzzle





Aufgabe: Ausgehend von der gelösten Stellung führe eine (längere) zufällige Folge von Zügen durch ("**Scramble**").

Dann finde eine Folge von Zügen, die das Puzzle wieder in die gelöste Stellung überführt.

Aufgabe: Ausgehend von der gelösten Stellung führe eine (längere) zufällige Folge von Zügen durch ("**Scramble**").

Dann finde eine Folge von Zügen, die das Puzzle wieder in die gelöste Stellung überführt.

Satz: Eine Stellung, bei der sich das leere Feld rechts unten befindet, ist genau dann aus der gelösten Stellung erreichbar, wenn sie eine **gerade** Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, 15$ darstellt.

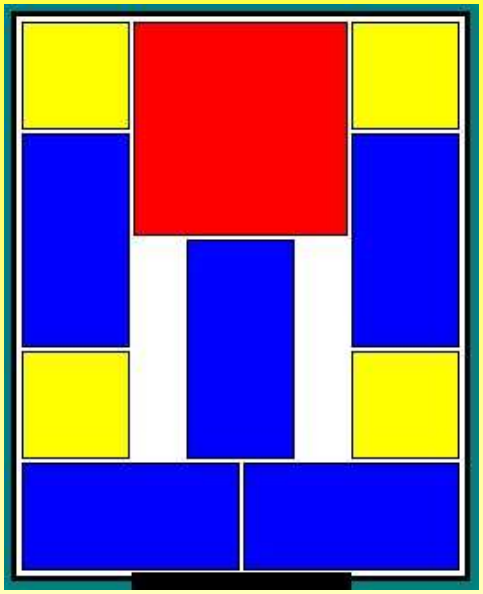
Aufgabe: Ausgehend von der gelösten Stellung führe eine (längere) zufällige Folge von Zügen durch ("**Scramble**").

Dann finde eine Folge von Zügen, die das Puzzle wieder in die gelöste Stellung überführt.

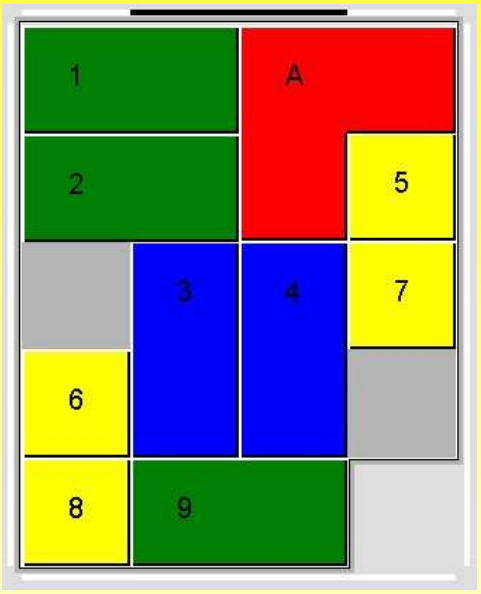
Satz: Eine Stellung, bei der sich das leere Feld rechts unten befindet, ist genau dann aus der gelösten Stellung erreichbar, wenn sie eine **gerade** Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, 15$ darstellt.

Beweisidee: Wir müssen nur noch zeigen, dass die geraden Permutationen auch wirklich möglich sind. Verwende dazu, dass die Gruppe aller geraden Permutationen (**alternierende Gruppe**) von den Dreier-Zykeln erzeugt wird. Finde eine Folge von Zügen, die den Dreier-Zykel (123) bewirkt.

Andere Schiebepuzzles



Century
(100 Züge)



Super Dries
(321 Züge)

Wie kann man so langzügige Lösungen finden?

Wie kann man so langzügige Lösungen finden?

(1) Betrachte den **Graph**, dessen Ecken die Stellungen und dessen Kanten die Züge des Puzzles sind.

Wie kann man so langzügige Lösungen finden?

(1) Betrachte den **Graph**, dessen Ecken die Stellungen und dessen Kanten die Züge des Puzzles sind.

(2) Dies ist ein **ungerichteter Graph**, da zu jedem Zug auch der Umkehrzug erlaubt ist.

Wie kann man so langzügige Lösungen finden?

(1) Betrachte den **Graph**, dessen Ecken die Stellungen und dessen Kanten die Züge des Puzzles sind.

(2) Dies ist ein **ungerichteter Graph**, da zu jedem Zug auch der Umkehrzug erlaubt ist.

(3) Der **Abstand** zweier Stellungen A, B sei die kürzeste Länge einer Zugfolge, die A in B überführt.

Wie kann man so langzügige Lösungen finden?

(1) Betrachte den **Graph**, dessen Ecken die Stellungen und dessen Kanten die Züge des Puzzles sind.

(2) Dies ist ein **ungerichteter Graph**, da zu jedem Zug auch der Umkehrzug erlaubt ist.

(3) Der **Abstand** zweier Stellungen A, B sei die kürzeste Länge einer Zugfolge, die A in B überführt.

(4) Hat Stellung B von A den Abstand d und macht man einen Zug, so hat die resultierende Stellung den Abstand $d-1$ oder d oder $d+1$ von A.

Algorithmus: (Berechnung des Abstands von A und B)

(1) Starte mit $d = 0$ und $L_0 = \{A\}$.

(2) Führe den folgenden Schritt für alle Stellungen S in L_d durch. Erhöhe dann d um eins und wiederhole **(2)**.

(3) Berechne alle Stellungen, die von S aus in einem Zug erreichbar sind. Ist B dabei, so gib $d+1$ aus und stoppe. Ansonsten füge alle Nachfolgestellungen von S, die nicht in L_{d-1} oder L_d sind, zu L_{d+1} hinzu.

Bemerkungen: Man muss immer nur die aktuellen Listen L_{d-1}, L_d und L_{d+1} speichern.

Durch Wiederholungen des Algorithmus kann man auch einen kürzesten Weg von A nach B finden.

3 – 2-D Drehpuzzles

Zu jedem Problem gibt es eine einfache Lösung:

3 – 2-D Drehpuzzles

Zu jedem Problem gibt es eine einfache Lösung:
hübsch, plausibel, und falsch.
(Henry L. Mencken)

3 – 2-D Drehpuzzles

Zu jedem Problem gibt es eine einfache Lösung:
hübsch, plausibel, und falsch.
(Henry L. Mencken)

Ein **2-D Drehpuzzle** ist ein spezielles **Permutationspuzzle**.

Durch Drehen von Teilbereichen des Puzzles werden die **Steine** des Puzzles permutiert.

Die Steine haben Farben oder **Aufkleber**, die ihre Position in der **Lösungsstellung** angeben.

3 – 2-D Drehpuzzles

Zu jedem Problem gibt es eine einfache Lösung:
hübsch, plausibel, und falsch.
(Henry L. Mencken)

Ein **2-D Drehpuzzle** ist ein spezielles **Permutationspuzzle**.

Durch Drehen von Teilbereichen des Puzzles werden die **Steine** des Puzzles permutiert.

Die Steine haben Farben oder **Aufkleber**, die ihre Position in der **Lösungsstellung** angeben.

Spiel: Führe eine längere zufällige Folge von Verdrehungen des Puzzles durch ("**Scramble**"). Finde dann eine Folge von Drehungen, die das Puzzle wieder in die Lösungsstellung überführt.

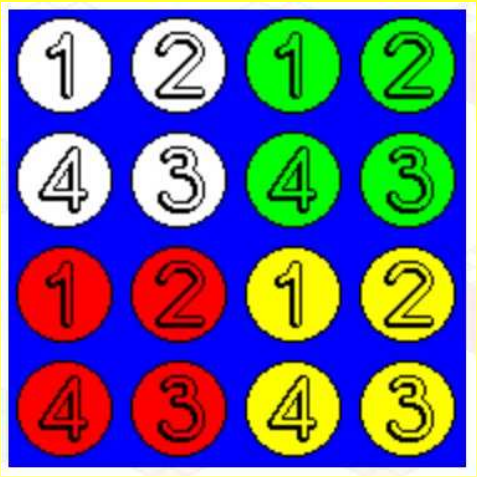
Gripple

Circle Puzzle

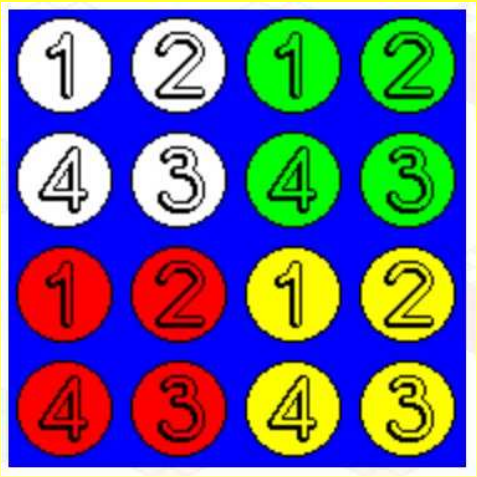
Ungarische Ringe

Topspin

Das Gripple Puzzle

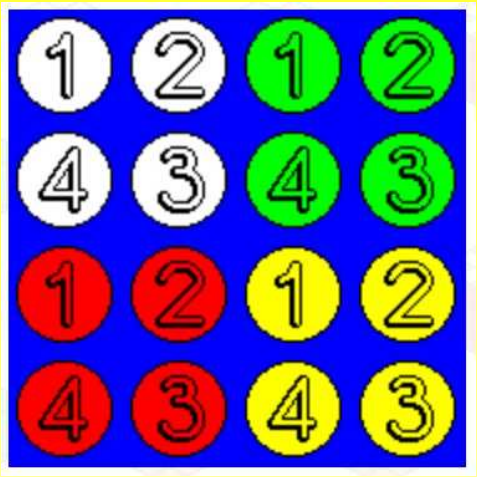


Das Gripple Puzzle



Es gibt fünf Drehmöglichkeiten: Lo, Ro, M, Lu, Ru bezeichnen jeweils 90^o Drehungen im Uhrzeigersinn.

Das Gripple Puzzle



Es gibt fünf Drehmöglichkeiten: Lo, Ro, M, Lu, Ru bezeichnen jeweils 90^o Drehungen im Uhrzeigersinn.

Lo', Ro', M', Lu', Ru' seien die entsprechenden Drehungen im Gegenuhrzeigersinn.

Jede Drehung bewirkt eine **Permutation** der 16 Steine. Diese Permutationen bilden eine **Gruppe**:

Jede Drehung bewirkt eine **Permutation** der 16 Steine. Diese Permutationen bilden eine **Gruppe**:

- Für die Hintereinanderausführung von Abbildungen gilt das **Assoziativgesetz**.

Jede Drehung bewirkt eine **Permutation** der 16 Steine. Diese Permutationen bilden eine **Gruppe**:

- Für die Hintereinanderausführung von Abbildungen gilt das **Assoziativgesetz**.
- Es gibt ein **neutrales Element**, nämlich das Nichtstun.

Jede Drehung bewirkt eine **Permutation** der 16 Steine. Diese Permutationen bilden eine **Gruppe**:

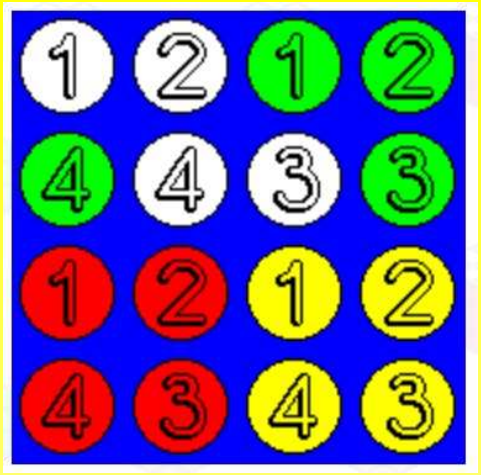
- Für die Hintereinanderausführung von Abbildungen gilt das **Assoziativgesetz**.
- Es gibt ein **neutrales Element**, nämlich das Nichtstun.
- Zu jeder Folge von Drehungen gibt es ein **inverses Element**, nämlich die umgekehrte Folge, die sie wieder aufhebt.

Jede Drehung bewirkt eine **Permutation** der 16 Steine. Diese Permutationen bilden eine **Gruppe**:

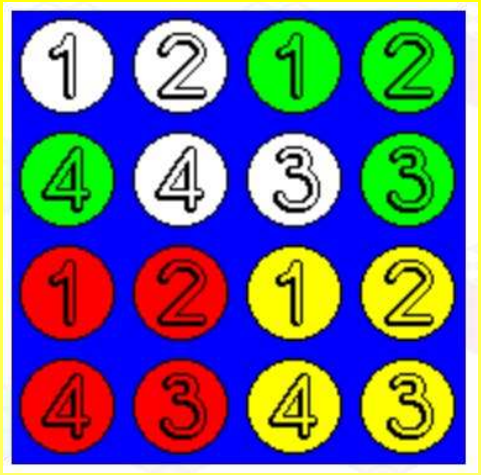
- Für die Hintereinanderausführung von Abbildungen gilt das **Assoziativgesetz**.
- Es gibt ein **neutrales Element**, nämlich das Nichtstun.
- Zu jeder Folge von Drehungen gibt es ein **inverses Element**, nämlich die umgekehrte Folge, die sie wieder aufhebt.

Idee: Betrachte die Wirkung eines **Kommutators**, z.B.

$$K \quad = \quad Lo' \quad M' \quad Lo \quad M$$



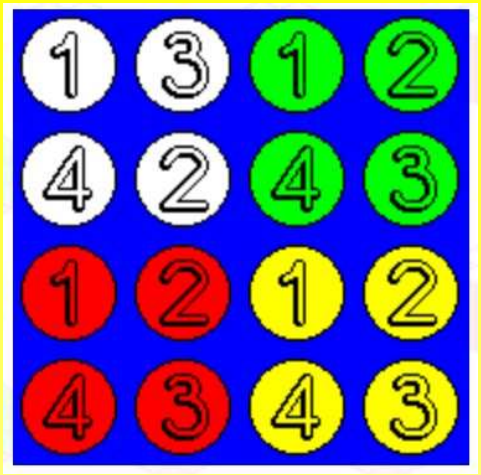
Das Ergebnis ist ein **Dreierzykel** der Steine in den Positionen $(2,1) \to (2,2) \to (2,3) \to (2,1)$.



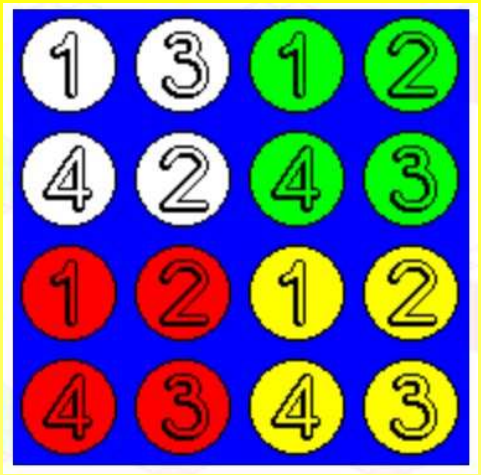
Das Ergebnis ist ein **Dreierzykel** der Steine in den Positionen $(2,1) \to (2,2) \to (2,3) \to (2,1)$.

Idee: Bringe die grüne vier mit Lo' eins weiter und wende nochmal K an. Dann stimmt die grüne vier wieder. Bringe am Ende die weiße Eins zurück auf ihren Platz. Die weitere Zugfolge sei also

$$Lo' \quad K \quad Lo^2$$

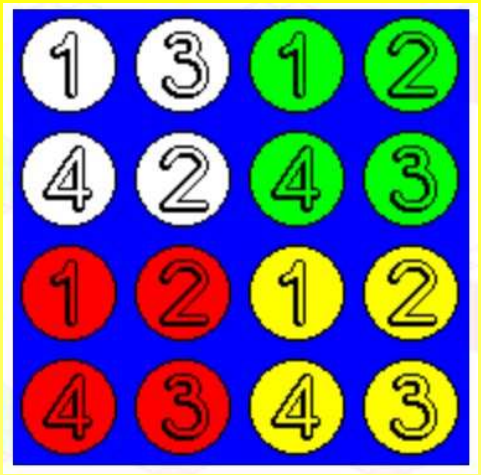


Das Gesamtergebnis ist eine **Transposition** der Steine auf den Positionen $(1, 2) \leftrightarrow (2, 2)$.



Das Gesamtergebnis ist eine **Transposition** der Steine auf den Positionen $(1,2) \leftrightarrow (2,2)$.

Idee: Will man zwei beliebige Steine vertauschen, so kann man wie folgt vorgehen:



Das Gesamtergebnis ist eine **Transposition** der Steine auf den Positionen $(1,2) \leftrightarrow (2,2)$.

Idee: Will man zwei beliebige Steine vertauschen, so kann man wie folgt vorgehen:

(1) Bringe die beiden Steine mit einer geeigneten Zugfolge S auf die Positionen $(1,2)$ und $(2,2)$.

(2) Führe $Z = K\ Lo'\ K\ Lo^2 = Lo'\ M'\ Lo\ M\ Lo^2\ M'\ Lo\ M\ Lo^2$ durch.

(2) Führe $Z = K\ Lo'\ K\ Lo^2 = Lo'\ M'\ Lo\ M\ Lo^2\ M'\ Lo\ M\ Lo^2$ durch.

(3) Mache die **Setup-Züge** mit S' wieder rückgängig.

(2) Führe $Z = K\ Lo'\ K\ Lo^2 = Lo'\ M'\ Lo\ M\ Lo^2\ M'\ Lo\ M\ Lo^2$ durch.

(3) Mache die **Setup-Züge** mit S' wieder rückgängig.

Fazit: Man kann zwei beliebige Steine vertauschen. Jede Permutation kann aus Transpositionen zusammengebaut werden. Also ist die Gruppe des Puzzles **Gripple** die **symmetrische Gruppe** $\mathbf{S_{16}}$ aller Permutationen der 16 Steine.

(2) Führe $Z = K\ Lo'\ K\ Lo^2 = Lo'\ M'\ Lo\ M\ Lo^2\ M'\ Lo\ M\ Lo^2$ durch.

(3) Mache die **Setup-Züge** mit S' wieder rückgängig.

Fazit: Man kann zwei beliebige Steine vertauschen. Jede Permutation kann aus Transpositionen zusammengebaut werden. Also ist die Gruppe des Puzzles **Gripple** die **symmetrische Gruppe** $\mathbf{S_{16}}$ aller Permutationen der 16 Steine.

Bemerkung: Die Verwendung der Setup-Zugfolge S im obigen Verfahren $S\ Z\ S'$ wird in der Theorie als die **Konjugation** der Zugfolge Z mit der Zugfolge S bezeichnet.

Die ungarischen Ringe

Im Gegensatz zur allgemeinen Annahme, dieses Puzzle sei vom ungarischen Ingenieur Endre Pap erfunden wurden, gibt es in Wirklichkeit ein US-Patent für seine Erfindung durch **William Churchill** im Jahr **1891**.

Wie knackt man ein solches Puzzle?

Sei R die Rotation des rechten Rings um einen Stein weiter im Uhrzeigersinn und L die entsprechende Rotation des linken Rings. Seien R', L' die inversen Rotationen.

Wie knackt man ein solches Puzzle?

Sei R die Rotation des rechten Rings um einen Stein weiter im Uhrzeigersinn und L die entsprechende Rotation des linken Rings. Seien R', L' die inversen Rotationen.

Idee: Probiere passende Kommutatoren aus und schaue nach, was sie tun. Da die beiden Schnittstellen fünf Steine auseinander sind, versuche es mit R^5 und L^5.

Wie knackt man ein solches Puzzle?

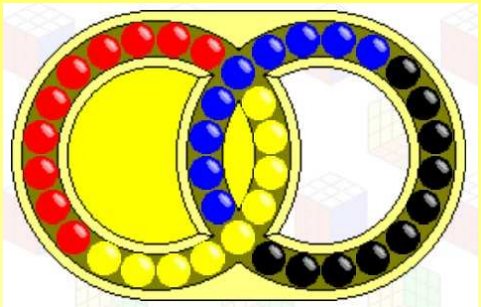
Sei R die Rotation des rechten Rings um einen Stein weiter im Uhrzeigersinn und L die entsprechende Rotation des linken Rings. Seien R', L' die inversen Rotationen.

Idee: Probiere passende Kommutatoren aus und schaue nach, was sie tun. Da die beiden Schnittstellen fünf Steine auseinander sind, versuche es mit R^5 und L^5.

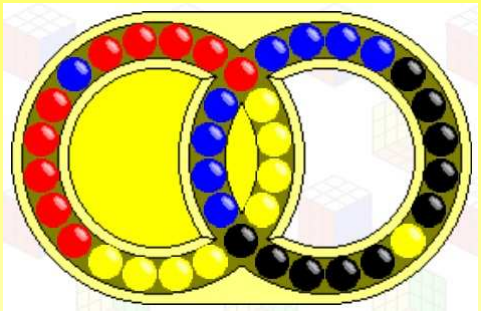
(1) Der Kommutator $C = R^5\ L^5\ (R')^5\ (L')^5$ vertauscht den Stein an der oberen Schnittstelle mit dem fünf Steine weiter links liegenden und den Stein an der unteren Schnittstelle mit dem fünf Steine weiter rechts liegenden.

(2) Der Kommutator $D = R^5\ (L')^5\ (R')^5\ L^5$ vertauscht die Steine an den Schnittstellen und die beiden Steine unten links und rechts fünf Stellen von der Schnittstelle.

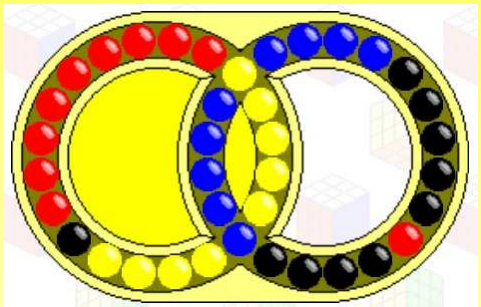
(2) Der Kommutator $D = R^5\ (L')^5\ (R')^5\ L^5$ vertauscht die Steine an den Schnittstellen und die beiden Steine unten links und rechts fünf Stellen von der Schnittstelle.



Lösungsstellung



Wirkung von C



Wirkung von D

Lösungsstrategie: (1) Bringe die 10 roten Steine nacheinanderliegend in den linken Kreis und die 10 schwarzen nacheinanderliegend in den rechten Kreis.

Lösungsstrategie: **(1)** Bringe die 10 roten Steine nacheinanderliegend in den linken Kreis und die 10 schwarzen nacheinanderliegend in den rechten Kreis.

(2) Finde Paare von gelben und blauen Steinen, die ausgetauscht gehören. Bringe diese an die Vertauschungsstellen der Kommutatoren und richte es so ein, dass am anderen Stellenpaar zwei gleichfarbige Steine liegen. Wende dann den entsprechenden Kommutator an.

Lösungsstrategie: **(1)** Bringe die 10 roten Steine nacheinanderliegend in den linken Kreis und die 10 schwarzen nacheinanderliegend in den rechten Kreis.

(2) Finde Paare von gelben und blauen Steinen, die ausgetauscht gehören. Bringe diese an die Vertauschungsstellen der Kommutatoren und richte es so ein, dass am anderen Stellenpaar zwei gleichfarbige Steine liegen. Wende dann den entsprechenden Kommutator an.

(3) Wiederhole **(2)** so lange, bis die blauen und gelben Steine auch alle passen.

4 – 3-D Schiebepuzzles

Goldene Regel für Lehrer:

4 – 3-D Schiebepuzzles

Goldene Regel für Lehrer:

Sprich die Wahrheit und nichts als die Wahrheit,

4 – 3-D Schiebepuzzles

Goldene Regel für Lehrer:

Sprich die Wahrheit und nichts als die Wahrheit,
aber nicht die ganze Wahrheit.

4 – 3-D Schiebepuzzles

Goldene Regel für Lehrer:

Sprich die Wahrheit und nichts als die Wahrheit,
aber nicht die ganze Wahrheit.

Ein **3-D Drehpuzzle** ist ein Permutationspuzzle, das aus einzelnen Steinen, genannt **Cubies**, besteht, die durch Drehungen um verschiedene Achsen vermischt werden.

4 – 3-D Schiebepuzzles

Goldene Regel für Lehrer:

Sprich die Wahrheit und nichts als die Wahrheit,
aber nicht die ganze Wahrheit.

Ein **3-D Drehpuzzle** ist ein Permutationspuzzle, das aus einzelnen Steinen, genannt **Cubies**, besteht, die durch Drehungen um verschiedene Achsen vermischt werden.

Die Cubies sind mit Aufklebern (**Stickern**) versehen, die die Position des Cubies im gelösten Puzzle festlegen.

4 – 3-D Schiebepuzzles

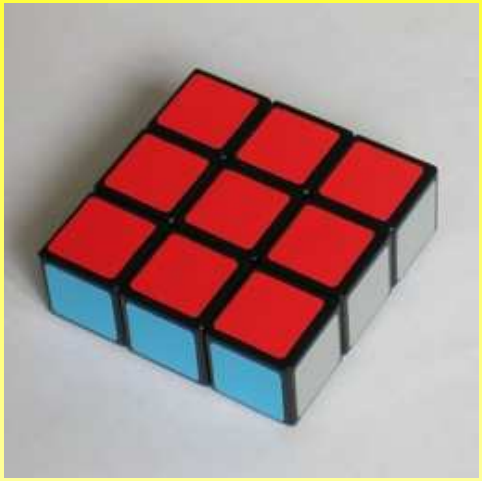
Goldene Regel für Lehrer:
Sprich die Wahrheit und nichts als die Wahrheit,
aber nicht die ganze Wahrheit.

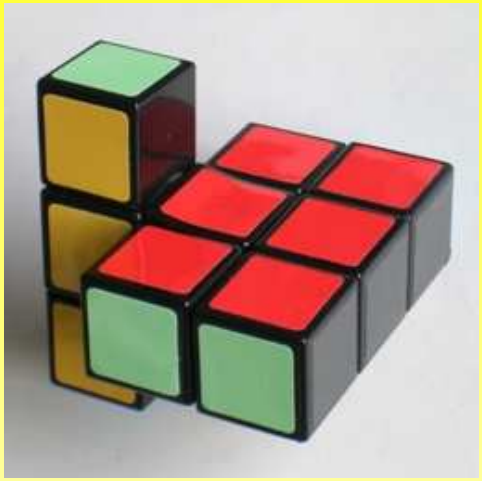
Ein **3-D Drehpuzzle** ist ein Permutationspuzzle, das aus einzelnen Steinen, genannt **Cubies**, besteht, die durch Drehungen um verschiedene Achsen vermischt werden.

Die Cubies sind mit Aufklebern (**Stickern**) versehen, die die Position des Cubies im gelösten Puzzle festlegen.

Zum Spielen führt man eine längere zufällige Folge von Drehungen durch (einen **Scramble**). Die Aufgabe ist dann, das Puzzle wieder in die gelöste Stellung zurückzudrehen.

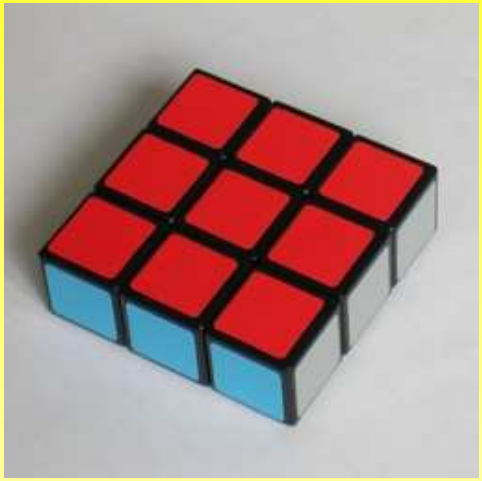
5 – Der Floppy-Cube

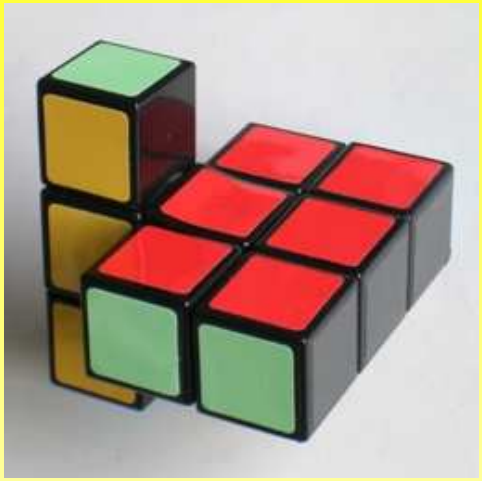




Es gibt vier Drehungen R, L, F, B um jeweils 180^o.

5 – Der Floppy-Cube





Es gibt vier Drehungen R, L, F, B um jeweils 180^o.

Die Stellungen des Floppy-Cube bilden eine **Untergruppe** der Gruppe aller Permutationen der 30 Sticker, die wir die **Floppy-Cube Gruppe** nennen.

Die vier **Ecken** des Floppy-Cube werden untereinander vertauscht.
Die Orientierung einer Ecke ist durch ihre Position festgelegt.

Die vier **Ecken** des Floppy-Cube werden untereinander vertauscht. Die Orientierung einer Ecke ist durch ihre Position festgelegt.

Wir halten die Ausrichtung der Mitte fest. Dann bleiben die vier **Kanten** des Floppy-Cupe stets an ihrem Ort und werden bei einer Drehung nur **gekippt**.

Die vier **Ecken** des Floppy-Cube werden untereinander vertauscht. Die Orientierung einer Ecke ist durch ihre Position festgelegt.

Wir halten die Ausrichtung der Mitte fest. Dann bleiben die vier **Kanten** des Floppy-Cupe stets an ihrem Ort und werden bei einer Drehung nur **gekippt**.

Die Stellung eines Floppy-Cube ist also beschrieben durch ein Element der symmetrischen Gruppe S_4 der Permutationen der vier Ecken und durch vier Elemente von S_2. Sie ist also ein Element von $S_4 \times S_2 \times S_2 \times S_2 \times S_2$.

Die vier **Ecken** des Floppy-Cube werden untereinander vertauscht. Die Orientierung einer Ecke ist durch ihre Position festgelegt.

Wir halten die Ausrichtung der Mitte fest. Dann bleiben die vier **Kanten** des Floppy-Cupe stets an ihrem Ort und werden bei einer Drehung nur **gekippt**.

Die Stellung eines Floppy-Cube ist also beschrieben durch ein Element der symmetrischen Gruppe S_4 der Permutationen der vier Ecken und durch vier Elemente von S_2. Sie ist also ein Element von $S_4 \times S_2 \times S_2 \times S_2 \times S_2$.

Sind alle diese $4! \cdot 2^4 = 24 \cdot 16 = 384$ Stellungen möglich?

Nein! Wenn man eine gerade Anzahl von Drehungen macht, ist eine gerade Anzahl von Kanten gekippt und die Eckenpermutation ist gerade (denn sie besteht aus einer geraden Anzahl von Transpositionen).

Wenn man eine ungerade Anzahl von Drehungen macht, ist eine ungerade Anzahl von Kanten gekippt und die Eckenpermutation ist ungerade.

Nein! Wenn man eine gerade Anzahl von Drehungen macht, ist eine gerade Anzahl von Kanten gekippt und die Eckenpermutation ist gerade (denn sie besteht aus einer geraden Anzahl von Transpositionen).

Wenn man eine ungerade Anzahl von Drehungen macht, ist eine ungerade Anzahl von Kanten gekippt und die Eckenpermutation ist ungerade.

Der Floppy-Cube besitzt also eine **Parität** und die Anzahl der möglichen Stellungen ist $384/2 = 192$.

Wie löst man den Floppy-Cube?

Wie löst man den Floppy-Cube?

(1) Die Eckenpermutation kann man intuitiv reparieren, indem man die Sticker an den vier Außenkanten jeweils gleich macht.

Wie löst man den Floppy-Cube?

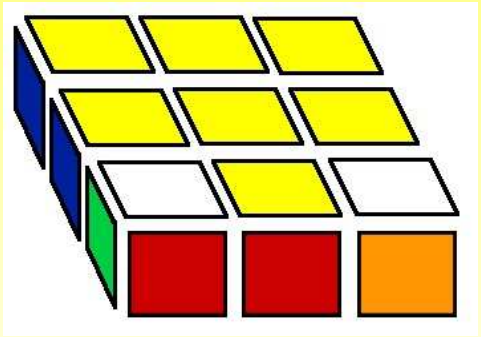
(1) Die Eckenpermutation kann man intuitiv reparieren, indem man die Sticker an den vier Außenkanten jeweils gleich macht.

(2) Was nun? Probieren wir doch wieder einen Kommutator, z.B. $R\,F\,R\,F$. Was passiert? Wenn wir $R\,F$ noch einmal anfügen, erhalten wir einen Zug, der genau zwei Kanten kippt.

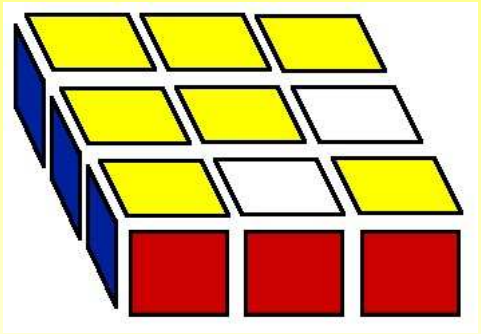
Wie löst man den Floppy-Cube?

(1) Die Eckenpermutation kann man intuitiv reparieren, indem man die Sticker an den vier Außenkanten jeweils gleich macht.

(2) Was nun? Probieren wir doch wieder einen Kommutator, z.B. $R\ F\ R\ F$. Was passiert? Wenn wir $R\ F$ noch einmal anfügen, erhalten wir einen Zug, der genau zwei Kanten kippt.

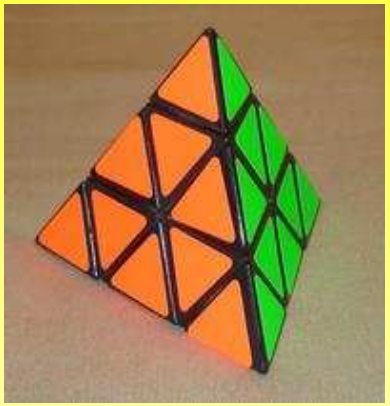
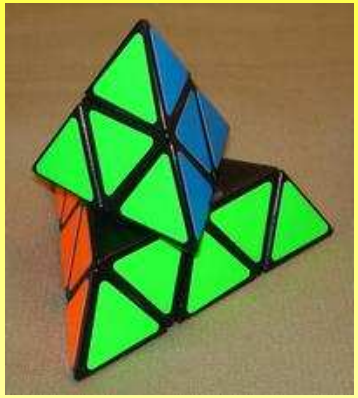
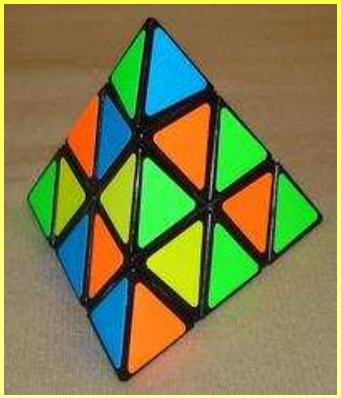


$R\ F\ R\ F$

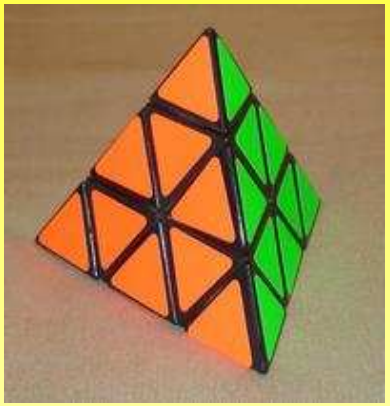
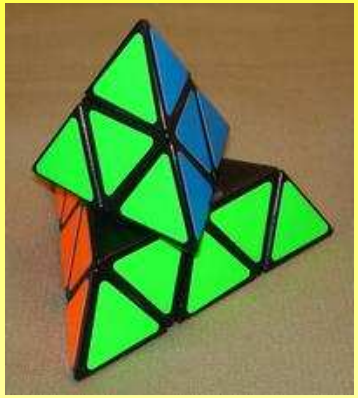
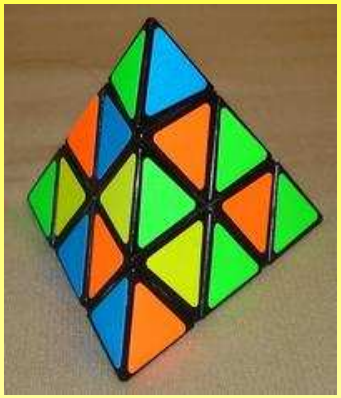


$R\ F\ R\ F\ R\ F$

Der Pyraminx (Die Zauberpyramide)

Der Pyraminx (Die Zauberpyramide)

Der Pyraminx wurde 1970 von **Uwe Meffert** erfunden und 1981 patentiert. Er besitzt vier **triviale Spitzen**. Abgesehen davon gibt es vier Drehungen R, L, U, B (jeweils um 120^o im Uhrzeigersinn).

Wie löst man den Pyraminx?

Wie löst man den Pyraminx?

(1) Bringe die trivialen Spitzen in die korrekte Stellung.

Wie löst man den Pyraminx?

(1) Bringe die trivialen Spitzen in die korrekte Stellung.

(2) Löse die "verlängerten Spitzen", also die Steine unter den Spitzen, intuitiv. Jetzt sind nur noch die 12 Sticker der 6 Kanten permutiert.

Wie löst man den Pyraminx?

(1) Bringe die trivialen Spitzen in die korrekte Stellung.

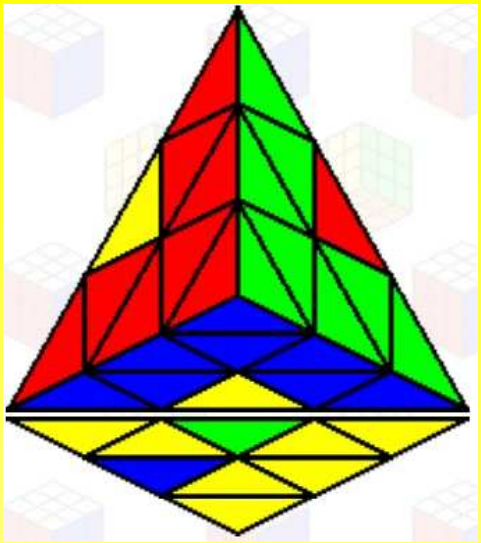
(2) Löse die "verlängerten Spitzen", also die Steine unter den Spitzen, intuitiv. Jetzt sind nur noch die 12 Sticker der 6 Kanten permutiert.

(3) Betrachte nun die Wirkung eines **Kommutators**:

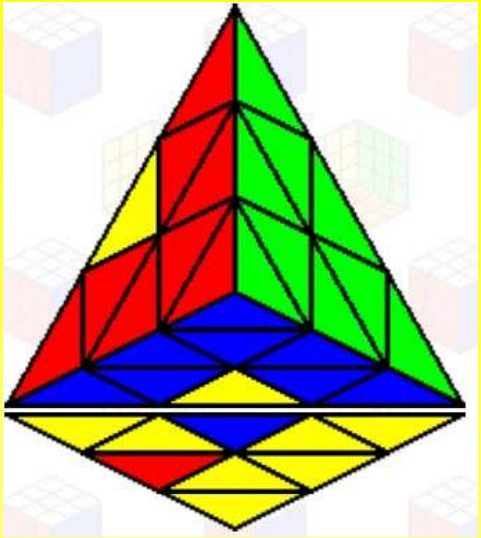
$$R \quad L' \quad R' \quad L$$

(rechts raus, links raus, rechts rein, links rein)

Auf der Unterseite findet ein 3-Zykel der Kanten statt. Zwei Kanten werden dabei gekippt.

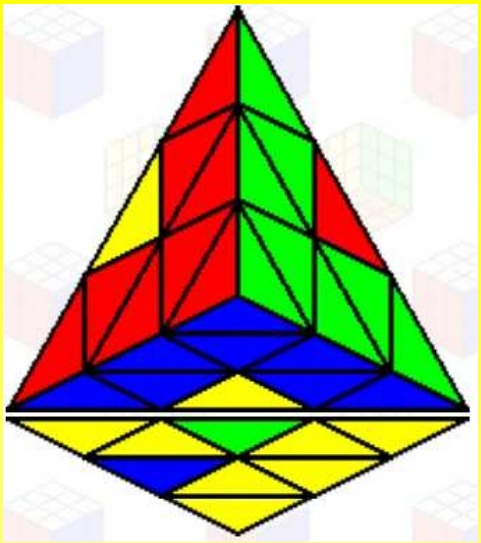


$R\ L'\ R'\ L$

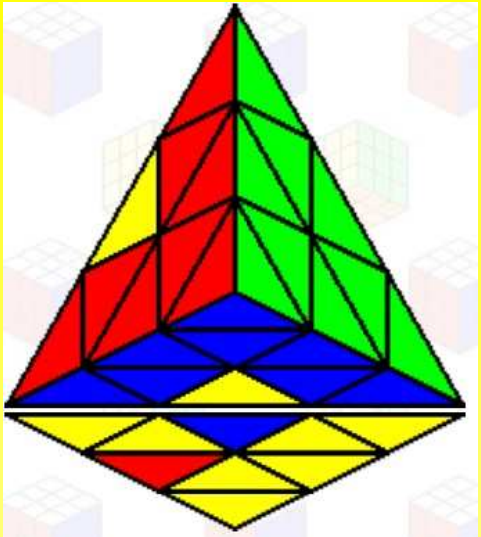


$R\ L'\ R'\ L\ \ R'\ B\ R\ B'$

So kann man alle Kanten an ihren richtigen Platz bringen.



$R\ L'\ R'\ L$

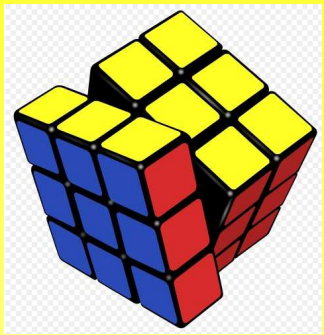


$R\ L'\ R'\ L\ \ R'\ B\ R\ B'$

So kann man alle Kanten an ihren richtigen Platz bringen.

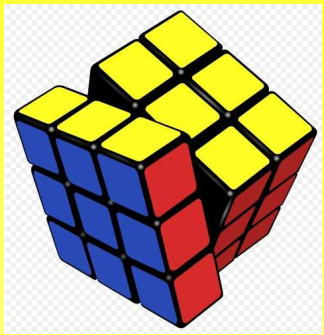
(4) Dreht man das Puzzle um 120^o weiter und wendet man den umgekehrten Kommutator an (links raus, rechts raus, links rein, rechts rein), so wird der 3-Zykel der Kanten rückgängig gemacht, aber zwei Kanten bleiben gekippt. So kann man auch die Orientierung der Kanten reparieren.

Der Zauberwürfel (Rubik's Cube)



Der Zauberwürfel wurde 1974 vom ungarischen Mathematiker **Ernö Rubik** erfunden. Er hat sechs 90^o-Drehungen R, L, F, B, U, D.

Der Zauberwürfel (Rubik's Cube)

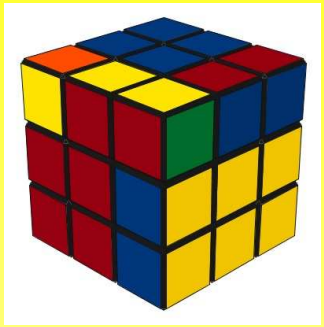


Der Zauberwürfel wurde 1974 vom ungarischen Mathematiker **Ernö Rubik** erfunden. Er hat sechs 90^o-Drehungen R, L, F, B, U, D.

Die Zauberwürfel-Gruppe hat **43 252 003 274 489 856 000** Elemente (Stellungen). Zählt man $R, R', R^2, L, L', L^2, \ldots$ jeweils als einen Zug, so kann man den Zauberwürfel in maximal 20 Zügen lösen (**Gottes-Algorithmus**), wie 2010 bewiesen wurde.

Wie kann man den Zauberwürfel lösen?

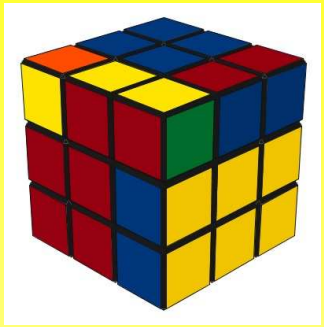
$R'\ F\ R\ F'$:



Wenn man einen Kommutator (hier rechts rein, links rein, rechts raus, links raus) anwendet, passiert Folgendes:

Wie kann man den Zauberwürfel lösen?

$R'\ F\ R\ F'$:

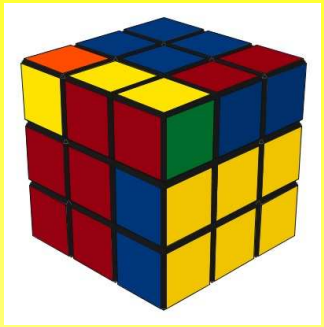


Wenn man einen Kommutator (hier rechts rein, links rein, rechts raus, links raus) anwendet, passiert Folgendes:

(1) Zwei Eckentranspositionen: vorne oben $\leftrightarrow$ unten, oben links $\leftrightarrow$ rechts; die Ecken werden dabei gedreht.

Wie kann man den Zauberwürfel lösen?

$R'\ F\ R\ F'$:



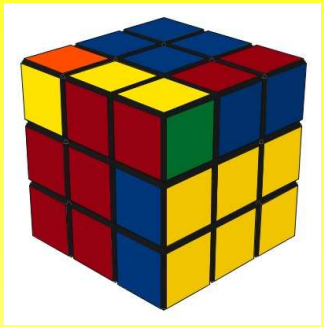
Wenn man einen Kommutator (hier rechts rein, links rein, rechts raus, links raus) anwendet, passiert Folgendes:

(1) Zwei Eckentranspositionen: vorne oben $\leftrightarrow$ unten, oben links $\leftrightarrow$ rechts; die Ecken werden dabei gedreht.

(2) 3-Zykel der Kanten, wobei zwei gekippt werden.

Wie kann man den Zauberwürfel lösen?

$R'\ F\ R\ F'$:



Wenn man einen Kommutator (hier rechts rein, links rein, rechts raus, links raus) anwendet, passiert Folgendes:

(1) Zwei Eckentranspositionen: vorne oben $\leftrightarrow$ unten, oben links $\leftrightarrow$ rechts; die Ecken werden dabei gedreht.

(2) 3-Zykel der Kanten, wobei zwei gekippt werden.

Mit Setup-Zügen und Kommutatoren ist der Zauberwürfel lösbar!

6 – Rubiks Uhr

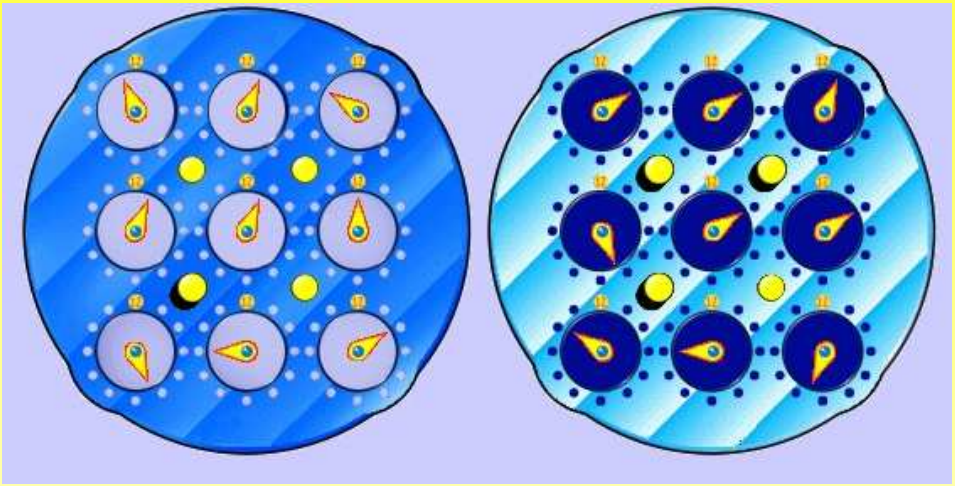
Verlorene Zeit wird nie wieder gefunden.

(Benjamin Franklin)

6 – Rubiks Uhr

Verlorene Zeit wird nie wieder gefunden.

(Benjamin Franklin)



Man kann die Uhren an den Ecken drehen, wobei immer die obere und untere Uhr gleichzeitig bewegt werden. Die restlichen 10 Uhren werden genau dann mitbewegt, wenn die anliegenden Knöpfe nicht gedrückt sind.

Mathematische Beschreibung

Dreht man eine Uhr weiter, durchläuft sie die Zahlen **modulo 12**. Somit es ist gleich, ob man 15 Mal weiter dreht oder 3 Mal. Eine Uhrenstellung ist also ein Element von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Mathematische Beschreibung

Dreht man eine Uhr weiter, durchläuft sie die Zahlen **modulo 12**. Somit es ist gleich, ob man 15 Mal weiter dreht oder 3 Mal. Eine Uhrenstellung ist also ein Element von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Eine Stellung des Puzzles wird also beschrieben durch zwei 3×3 Matrizen von Elementen aus $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Es gibt **14** unabhängige Uhren, denn die Uhren oben und unten an den Ecken sind ja gekoppelt. Man braucht daher 14 linear unabhängige Züge.

Es gibt **14** unabhängige Uhren, denn die Uhren oben und unten an den Ecken sind ja gekoppelt. Man braucht daher 14 linear unabhängige Züge.

Beispiel eines Zuges: drehe links unten, Knopfstellung $\binom{D\ D}{U\ D}$ liefert die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Die Unterseite wird gespiegelt dargestellt.)

Stellen wir einen Zug durch die Position der Knöpfe dar, wobei die zu drehende Ecke rot angegeben wird, so gibt es bis auf Drehungen des Puzzles die folgenden fünf Basiszüge:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & U \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & \mathbf{U} \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & D \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & D \end{pmatrix}$$

Stellen wir einen Zug durch die Position der Knöpfe dar, wobei die zu drehende Ecke rot angegeben wird, so gibt es bis auf Drehungen des Puzzles die folgenden fünf Basiszüge:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & U \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & \mathbf{U} \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & D \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & D \end{pmatrix}$$

Die folgenden Zugkombinationen ergeben dann zusammen mit Drehungen des Puzzles die notwendige Basis:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & U \\ U & \mathbf{D} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ D & U \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U & U \\ \mathbf{D} & U \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{U} & U \\ U & U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & \mathbf{U} \\ U & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ D & U \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U & U \\ \mathbf{D} & U \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{U} & U \\ U & U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & \mathbf{U} \\ U & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & U \\ U & U \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D & \mathbf{U} \\ U & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Zügen und den gedrehten Versionen lässt sich das Puzzle offenbar lösen. Es gibt aber auch deutlich effizientere Verfahren.

7 – Gray Code Puzzles

Ich bin nicht jung genug
um alles zu wissen.
(Oscar Wilde)

7 – Gray Code Puzzles

Ich bin nicht jung genug
um alles zu wissen.
(Oscar Wilde)

Aufgabe: Schreibe die 16 binären Vierertupel $(0,0,0,0)$, $(0,0,0,1), \ldots, (1,1,1,1)$ so nacheinander, dass sich von einem Tupel zum nächsten immer nur eine Stelle ändert.

7 – Gray Code Puzzles

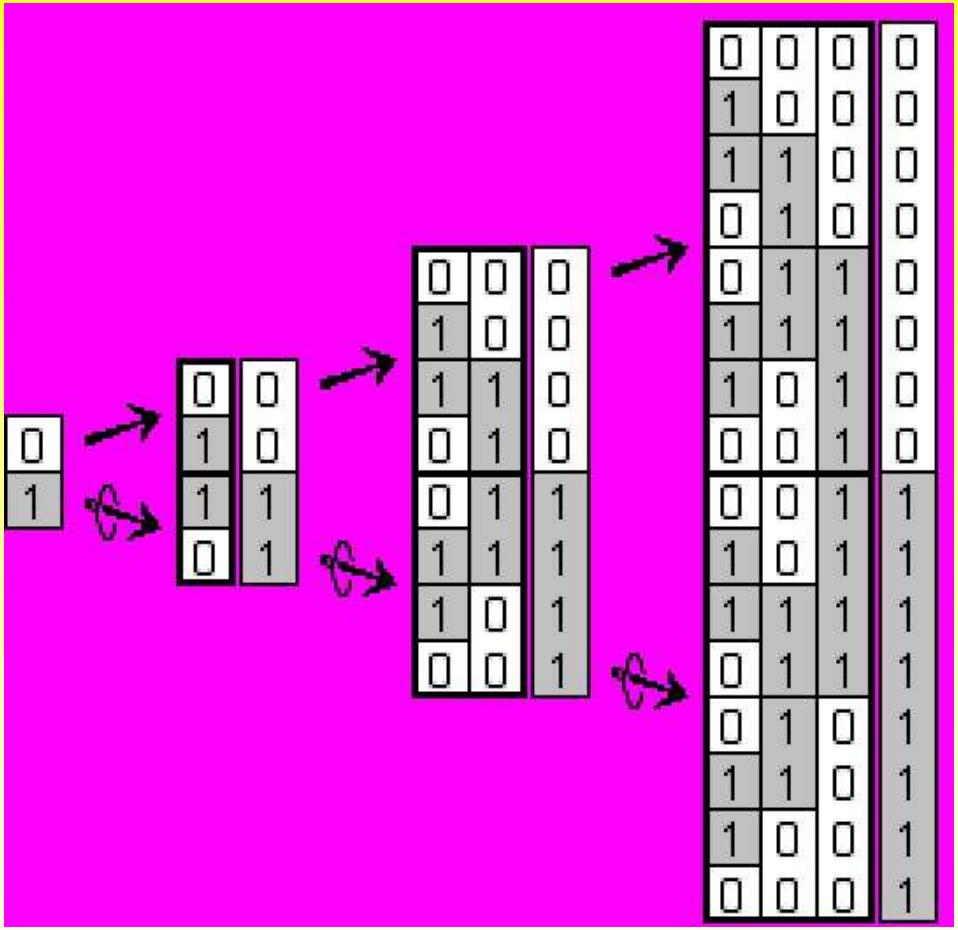
Ich bin nicht jung genug
um alles zu wissen.
(Oscar Wilde)

Aufgabe: Schreibe die 16 binären Vierertupel $(0,0,0,0)$, $(0,0,0,1), \ldots, (1,1,1,1)$ so nacheinander, dass sich von einem Tupel zum nächsten immer nur eine Stelle ändert.

Lösung: (Der Gray Code)

$(0,0,0,0)$, $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,1,1)$, $(0,1,1,1)$, $(0,1,0,1,)$, $(1,1,0,1)$, $(1,0,0,1)$, $(0,0,0,1)$.

Gray Codes gibt es für jede Tupellänge. Rekursive Konstrukton:



Mathematische Beschreibung der Gray Codes

Bilde den **Graphen**, an dessen **Ecken** die 16 binären Vierertupel stehen. Eine **Kante** wird eingefügt, wenn sich die beiden Tupel an genau einer Stelle unterscheiden.

Mathematische Beschreibung der Gray Codes

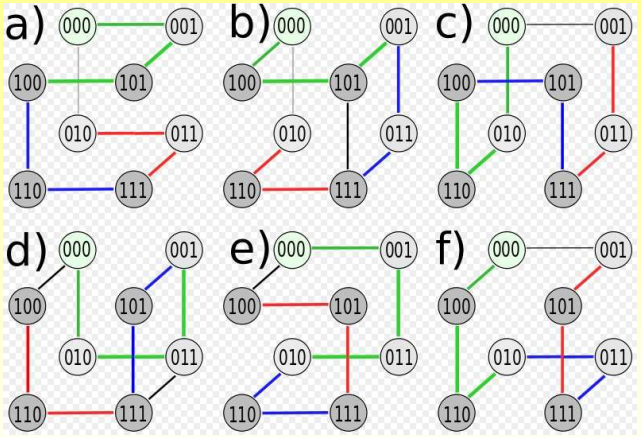
Bilde den **Graphen**, an dessen **Ecken** die 16 binären Vierertupel stehen. Eine **Kante** wird eingefügt, wenn sich die beiden Tupel an genau einer Stelle unterscheiden.

Der Gray Code ist dann ein **Hamiltonscher Pfad** durch den Graphen, d.h. ein Rundweg, der jede Ecke genau einmal besucht. Als solcher ist der Gray Code nicht eindeutig:

Mathematische Beschreibung der Gray Codes

Bilde den **Graphen**, an dessen **Ecken** die 16 binären Vierertupel stehen. Eine **Kante** wird eingefügt, wenn sich die beiden Tupel an genau einer Stelle unterscheiden.

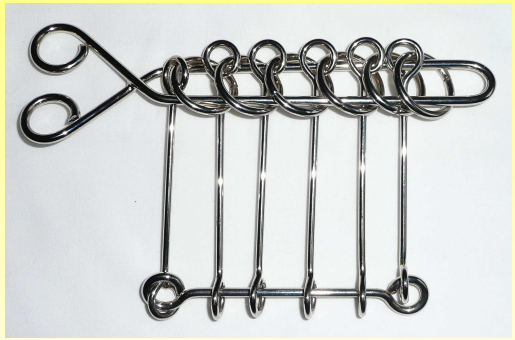
Der Gray Code ist dann ein **Hamiltonscher Pfad** durch den Graphen, d.h. ein Rundweg, der jede Ecke genau einmal besucht. Als solcher ist der Gray Code nicht eindeutig:



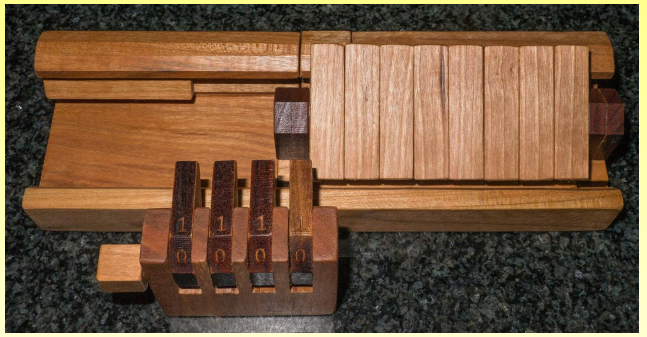
Beispiele von Gray Code Puzzles

Spinout

"The Brain"



Chinesische Ringe



Hexadezimales Puzzle

Gray Code Puzzles zu anderen Zahlensystemen

Matryoshka (3-adisch)

Mysterians (5-adisch)

Schloss 250+ (6-adisch)

Kugellager (7-adisch)

Literatur

(1) Jaap's Puzzle Page (Jaap Scherphuis)
`www.jaapsch.net/puzzles/`

(2) David Joyner, *Adventures in Group Theory*,
Johns Hopkins Univ. Press 2008

(3) Extremely Puzzling (Goetz Schwandtner)
`puzzles.schwandtner.info/group_nary.html`

Speedcubing

6.344
SPEED STACKS
Princeton
FALL 2012

Princeton
FALL 2012

DELTA
LAB
2:42.793
SPEED STACKS

THE END

THE END

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

THE END

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

In the end, everything is a gag.
(Charlie Chaplin)