Grundlagen der Mathemagie

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung “Bezaubernde Mathematik”

Universität Passau, 16.12.2014

Inhaltsübersicht

Inhaltsübersicht

1. **Massenhypnose**

Inhaltsübersicht

1. **Massenhypnose**
2. **Zahlentricks**

Inhaltsübersicht

Inhaltsübersicht

1. **Massenhypnose**
2. **Zahlentricks**
3. **Zauber der Geometrie**
4. **Alles Mögliche und Unmögliche**

Inhaltsübersicht

Mathemagischer Assistent:

StD Helmut Glas (ASG Passau), a.k.a. **Glasini**

1 – Massenhypnose

Alle die an Telekinese glauben

1 – Massenhypnose

Alle die an Telekinese glauben sollen bitte meine Hand heben.

1 – Massenhypnose

Alle die an Telekinese glauben
sollen bitte meine Hand heben.

Die Zauberkugel

1 – Massenhypnose

Alle die an Telekinese glauben sollen bitte meine Hand heben.

Die Zauberkugel

$$(10\,a + b) - a - b \;=\; 9\,a$$

Die erotische Zahl der Mathemagie

2 1 5 8 5 9 3

Die erotische Zahl der Mathemagie

2 1 5 8 5 9 3

Wenn **zwei** sich **eins** sind

und **fünf** Minuten nicht **Acht** geben,

erkennen sie nach **fünf** Wochen,

dass sie in **neun** Monaten **drei** sind.

2 – Zahlentricks

Hast Du schon einmal aufgehört zu denken

2 – Zahlentricks

Hast Du schon einmal aufgehört zu denken
und vergessen wieder anzufangen?
(Winnie-the-Pooh)

2 – Zahlentricks

**Hast Du schon einmal aufgehört zu denken
und vergessen wieder anzufangen?**
(Winnie-the-Pooh)

Gedankenübertragung

2 – Zahlentricks

Hast Du schon einmal aufgehört zu denken
und vergessen wieder anzufangen?
(Winnie-the-Pooh)

Gedankenübertragung

x sei die vom Schüler gedachte Zahl

y sei die vom Lehrer gedachte Zahl

$$[(x \cdot 2) + 2] \cdot 5 - (10 - y) = 10\,x + y$$

Die mathemagischen Stäbe

Die mathemagischen Stäbe

$$\begin{bmatrix}7\\3\\2\\9\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}5\\9\\4\\5\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}4\\7\\1\\8\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}7\\6\\5\\6\end{bmatrix}\qquad\qquad\begin{bmatrix}9\\2\\2\\8\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}7\\5\\3\\7\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}4\\6\\1\\9\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2\\9\\5\\8\end{bmatrix}$$

Die mathemagischen Stäbe

$$\begin{bmatrix}7\\3\\2\\9\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5\\9\\4\\5\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4\\7\\1\\8\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7\\6\\5\\6\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}9\\2\\2\\8\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7\\5\\3\\7\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4\\6\\1\\9\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\9\\5\\8\end{bmatrix}$$

Die Auflösung des Tricks erfolgt in den Übungen!

(**Tipp:** Suchen Sie eine Relation in den Zahlentupeln.)

Würfeladdition

Wie schafft es der mathemagische Assistent, fünf 3-stellige Zahlen im Vorübergehen zu Addieren, z.B.

$$558 \ + \ 642 \ + \ 762 \ + \ 971 \ + \ 186 \ = \ 3119\,?$$

Würfeladdition

Wie schafft es der mathemagische Assistent, fünf 3-stellige Zahlen im Vorübergehen zu Addieren, z.B.

$$558 \ + \ 642 \ + \ 762 \ + \ 971 \ + \ 186 \ = \ 3119\,?$$

• Die mittlere Ziffer ist bei jedem Würfel eine feste Zahl. Die Summe der Zehnerzahlen ist also stets $40 + 50 + 60 + 70 + 80 = 300$.

Würfeladdition

Wie schafft es der mathemagische Assistent, fünf 3-stellige Zahlen im Vorübergehen zu Addieren, z.B.

$$558 \ + \ 642 \ + \ 762 \ + \ 971 \ + \ 186 \ = \ 3119\,?$$

• Die mittlere Ziffer ist bei jedem Würfel eine feste Zahl. Die Summe der Zehnerzahlen ist also stets $40 + 50 + 60 + 70 + 80 = 300$.

• Die Summe der Hunderter- und Einerziffern ist auf jedem Würfel konstant. Die Summen 7,8,9,10,13 kommen vor. Es gilt:
$7 + 8 + 9 + 10 + 13 = 47$.

Würfeladdition

Wie schafft es der mathemagische Assistent, fünf 3-stellige Zahlen im Vorübergehen zu Addieren, z.B.

$$558 \ + \ 642 \ + \ 762 \ + \ 971 \ + \ 186 \ = \ 3119\,?$$

• Die mittlere Ziffer ist bei jedem Würfel eine feste Zahl. Die Summe der Zehnerzahlen ist also stets $40 + 50 + 60 + 70 + 80 = 300$.

• Die Summe der Hunderter- und Einerziffern ist auf jedem Würfel konstant. Die Summen 7,8,9,10,13 kommen vor. Es gilt:
$7 + 8 + 9 + 10 + 13 = 47$.

• Die Summe der Hunderter ist also $4700 + 300 = 5000$ minus die Summe der Einerstellen. Der Magier berechnet also die Summe s der Einserstellen und schreibt $50 - s$ und s nebeneinander.

Das Streichquartett

Das Streichquartett

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Das Streichquartett

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Die Zuschauer bestimmen, welche Zeilen und Spalten gestrichen werden. Der mathemagische Assistent hat die Summe der vier verbleibenden Zahlen dennoch richtig vorhergesagt. Wie funktioniert dies?

Eine Verallgemeinerung

Eine Verallgemeinerung

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 17 \\ 9 & 5 & 1 & 10 \\ 12 & 8 & 4 & 13 \\ 13 & 9 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Eine Verallgemeinerung

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 17 \\ 9 & 5 & 1 & 10 \\ 12 & 8 & 4 & 13 \\ 13 & 9 & 5 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Eine Verallgemeinerung

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 17 \\ 9 & 5 & 1 & 10 \\ 12 & 8 & 4 & 13 \\ 13 & 9 & 5 & 14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Eine Verallgemeinerung

$$
\begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 17 \\ 9 & 5 & 1 & 10 \\ 12 & 8 & 4 & 13 \\ 13 & 9 & 5 & 14 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}
$$

Jede Zeile hat einen Zeilengrad und jede Spalte einen Spaltengrad. Die Einträge sind die Summe des jeweiligen Zeilengrads und Spaltengrads. Im Endergebnis kommt jede Zeile und jede Spalte genau einmal vor. Die Summe ist also

$$9 + 2 + 5 + 6 \; + \; 7 + 3 - 1 + 8 \; = \; 39.$$

Ein supermagisches Quadrat

Die Zuschauer bestimmen eine Zahl zwischen 40 und 90. Der mathemagische Assistent schreibt sofort ein **supermagisches Quadrat** wie das von **Albrecht Dürer** aus **Melencolia I** hin:

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

• Die Summe der Zeilen und Spalten ist jeweils 34.

• Die Summe der Diagonalen und der fünf 2×2 Teilquadrate an den Ecken und in der Mitte ist jeweils 34.

• Die Summe der Ecken sowie der oberen/unteren und linken/rechten Seitenmitten ist jeweils 34.

Weitere Infos: Übungen, "Wetten dass ..." am 5.10.2002

Die schwerste Zahl im Taschenrechner

Die schwerste Zahl im Taschenrechner

$$
\begin{array}{r}
6\,8\,8\,8\,8\,8\,8\,9 \\
+1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\
=8\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7
\end{array}
$$

3 – Zauber der Geometrie

Der Kreis ist eine geometrische Figur

3 – Zauber der Geometrie

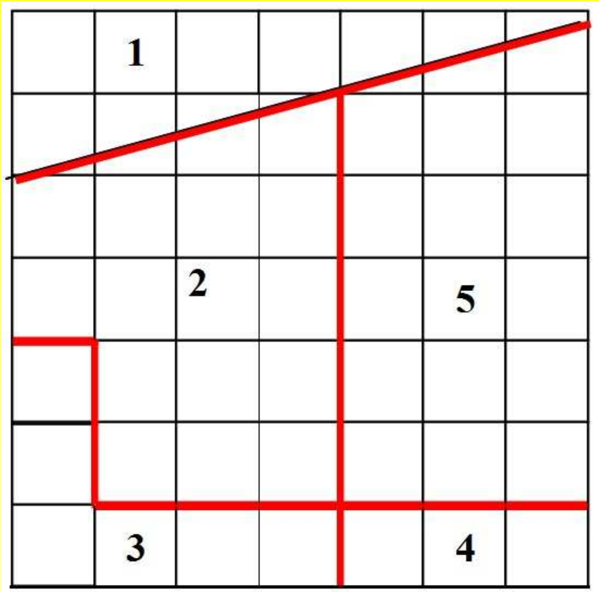
Der Kreis ist eine geometrische Figur bei der an allen Ecken und Enden gespart wurde.

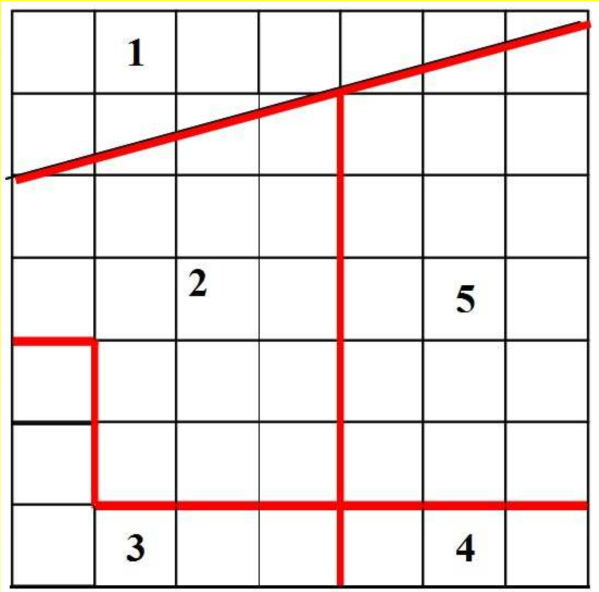
3 – Zauber der Geometrie

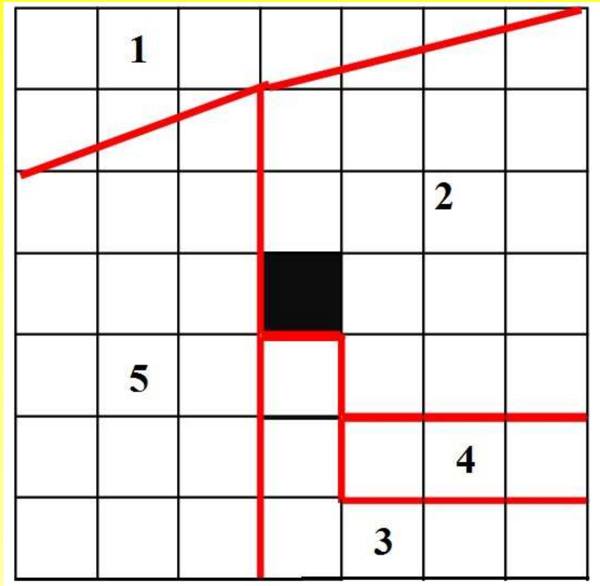
Der Kreis ist eine geometrische Figur bei der an allen Ecken und Enden gespart wurde.

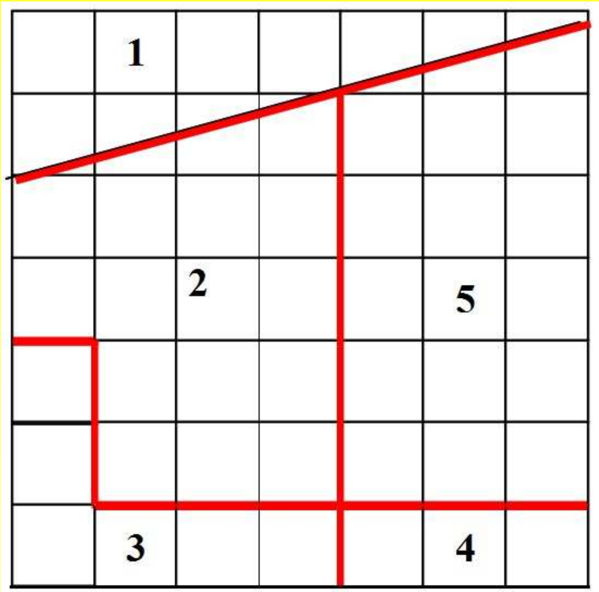
Ein Quadrat verschwindet

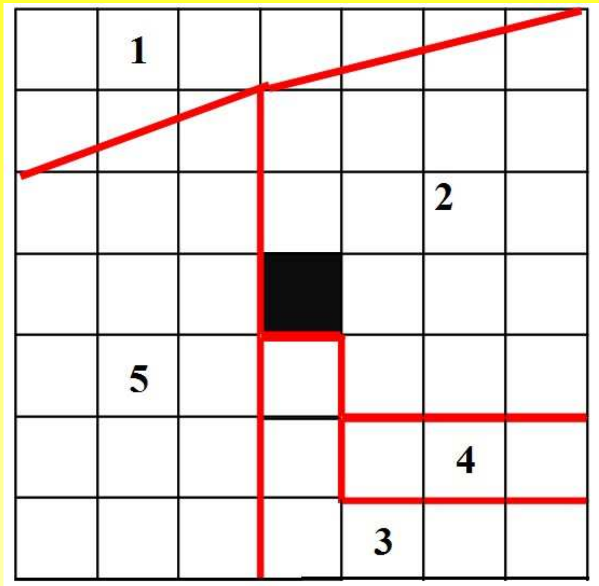
Wie kann der mathemagische Assistent aus einem Feld mit $7 \cdot 7 = 49$ Quadraten durch Umlegen der Teile plötzlich eines mit $49 - 1 = 48$ Quadraten machen?


1
2
5
3
4

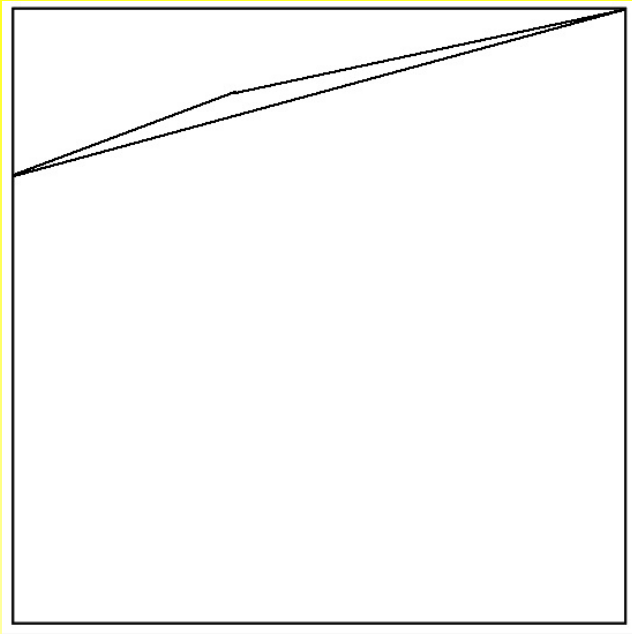

1
2
5
3
4

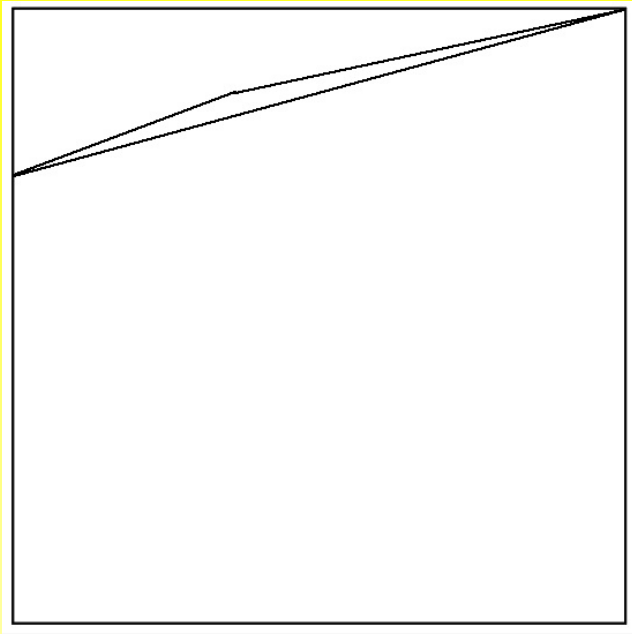

1
2
5
4
3





Im linken Bild bleibt oben eigentlich ein sehr flaches Dreieck frei!





Eine Version dieses Tricks hat es sogar ins deutsche Frühstücksfernsehen geschafft (siehe Film **"Die unendliche Schokolade"**).

Ein Päckchen aus China

Ein Päckchen aus China

Der schwarze **Luborwürfel** passt in den roten, und der rote in den schwarzen! Wie ist das möglich?

Ein Päckchen aus China

Der schwarze **Luborwürfel** passt in den roten, und der rote in den schwarzen! Wie ist das möglich?

Der rote und der schwarze "Würfel" sind eigentlich zwei **identische Quader**.

Ein Päckchen aus China

Der schwarze **Luborwürfel** passt in den roten, und der rote in den schwarzen! Wie ist das möglich?

Der rote und der schwarze "Würfel" sind eigentlich zwei **identische Quader**.

Aussenmaß: $23 \times 30 \times 35$ mm

Innenmaß: $22 \times 24 \times 31$ mm

Ein Päckchen aus China

Der schwarze **Luborwürfel** passt in den roten, und der rote in den schwarzen! Wie ist das möglich?

Der rote und der schwarze “Würfel” sind eigentlich zwei **identische Quader**.

Aussenmaß: $23 \times 30 \times 35$ mm

Innenmaß: $22 \times 24 \times 31$ mm

Stellt man den schwarzen Quader also **verdreht** in den roten, so schauen oben 13 mm heraus. Und umgekehrt!

Ein Päckchen aus China

Der schwarze **Luborwürfel** passt in den roten, und der rote in den schwarzen! Wie ist das möglich?

Der rote und der schwarze “Würfel” sind eigentlich zwei **identische Quader**.

Aussenmaß: $23 \times 30 \times 35$ mm

Innenmaß: $22 \times 24 \times 31$ mm

Stellt man den schwarzen Quader also **verdreht** in den roten, so schauen oben 13 mm heraus. Und umgekehrt!

Die Quader heißen auch **Gozinta Boxen** nach einer Verballhornung von **“goes into”**.

Der Kerzenzauber

Der Kerzenzauber

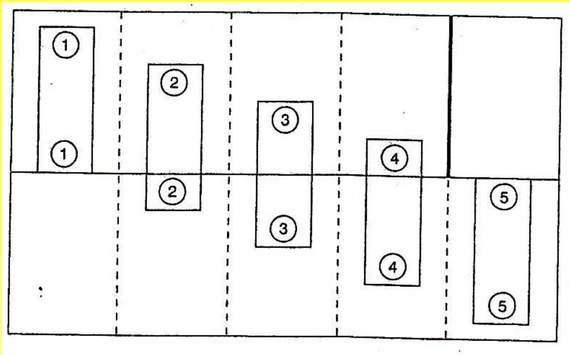
Advent, Advent,
ein Kerzlein brennt.
Erst eins, dann zwei, dann drei, dann vier,
dann steht das Christkind vor der Tür.

Der Kerzenzauber

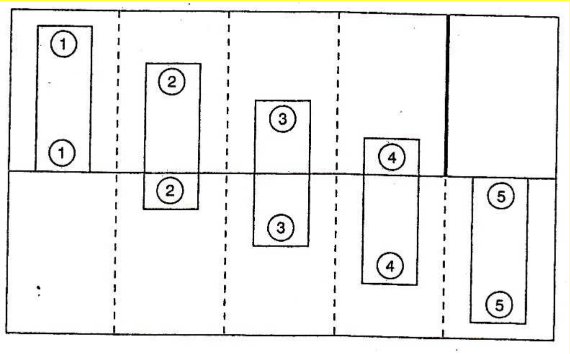
Advent, Advent,
ein Kerzlein brennt.
Erst eins, dann zwei, dann drei, dann vier,
dann steht das Christkind vor der Tür.
Und wenn das fünfte Kerzlein brennt,
dann hast Du Weihnachten verpennt!

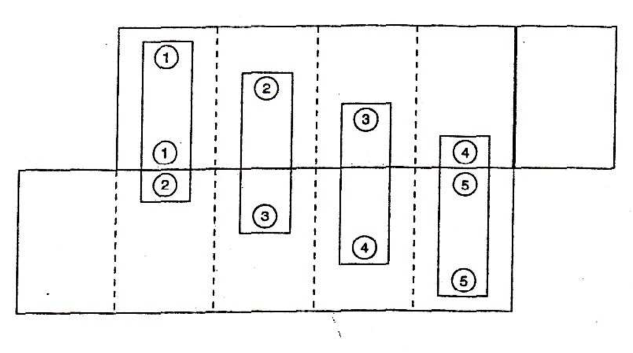
Das Geheimnis der Verschwindepuzzles

Das Geheimnis der Verschwindepuzzles

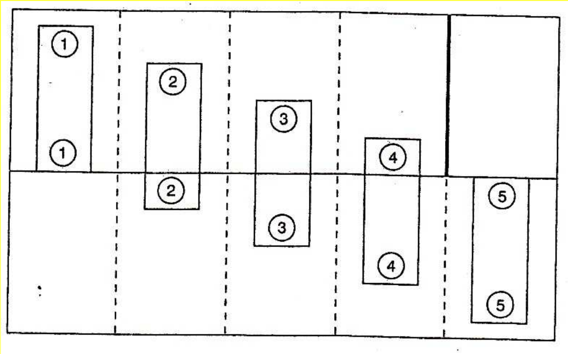


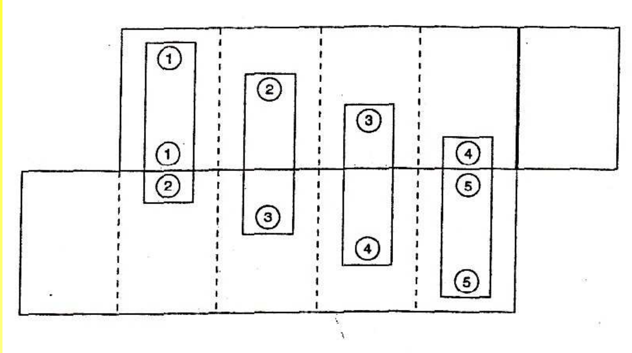
Das Geheimnis der Verschwindepuzzles

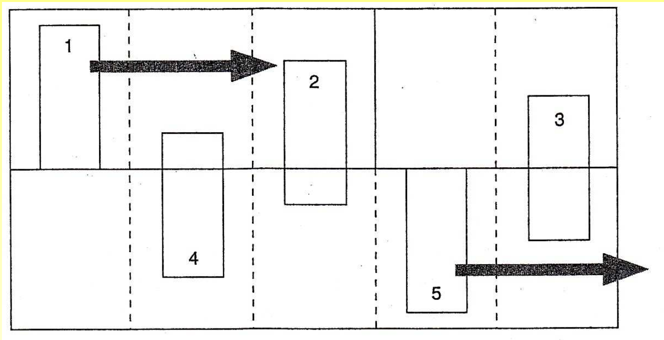




Das Geheimnis der Verschwindepuzzles







4 – Alles Mögliche und Unmögliche

Ein guter mathematischer Scherz ist immer besser

4 – Alles Mögliche und Unmögliche

Ein guter mathematischer Scherz ist immer besser als ein Dutzend mittelmäßiger Abhandlungen.

(John E. Littlewood)

4 – Alles Mögliche und Unmögliche

Ein guter mathematischer Scherz ist immer besser als ein Dutzend mittelmäßiger Abhandlungen.

(John E. Littlewood)

Alles in Ordnung!

4 – Alles Mögliche und Unmögliche

Ein guter mathematischer Scherz ist immer besser als ein Dutzend mittelmäßiger Abhandlungen.

(John E. Littlewood)

Alles in Ordnung!

Der Kartentrick **“In der Herberge”** beruht auf dem mathematische Konzept einer **Invariante**.

4 – Alles Mögliche und Unmögliche

Ein guter mathematischer Scherz ist immer besser als ein Dutzend mittelmäßiger Abhandlungen.

(John E. Littlewood)

Alles in Ordnung!

Der Kartentrick **“In der Herberge”** beruht auf dem mathematische Konzept einer **Invariante**.

`Eine Invariante ist das, was gleich bleibt, wenn sich alles ändert.`


Junker
Queen
König
Ass
Junker
Queen
König
Ass


Junker
Queen
König
Ass
Junker
Queen
König
Ass
Ass
Junker
Queen
König
Ass
Junker
Queen
König

Die **Invariante** ist die zyklische Anordnung der Karten **B**, **D**, **K**, **A**.

Das ist ja unwahrscheinlich!

Kartenwerte: $A = 1$, $B = 2$, $D = 3$, $K = 4$.

Das ist ja unwahrscheinlich!

Kartenwerte: $A = 1$, $B = 2$, $D = 3$, $K = 4$.

Der Kartentrick **Kruskal Count** stammt von dem Mathematiker Martin D. Kruskal (1925-2006) und verwendet die Idee der **Kopplungszeit** einer **Markow-Kette**.

Das ist ja unwahrscheinlich!

Kartenwerte: $A = 1$, $B = 2$, $D = 3$, $K = 4$.

Der Kartentrick **Kruskal Count** stammt von dem Mathematiker Martin D. Kruskal (1925-2006) und verwendet die Idee der **Kopplungszeit** einer **Markow-Kette**.

Der mathemagische Assistent macht die gleiche Zählung wie die Teilnehmer, startet aber stets mit der ersten Karte. Mit hoher Wahrscheinlichkeit ist in beiden Folgen **irgendwann eine Karte gleich**. Ab dann geht es jeweils gleich weiter und auch die Endkarte ist gleich!

Mathemagisches Modell des Kruskal Counts

Mathemagisches Modell des Kruskal Counts

- Der durchschnittliche Wert einer Karte ist

$(1 + 2 + \cdots + 10 + 2 + 3 + 4)/13 = 64/13.$

Mathemagisches Modell des Kruskal Counts

- Der durchschnittliche Wert einer Karte ist $(1 + 2 + \cdots + 10 + 2 + 3 + 4)/13 = 64/13$.
- Ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man eine Karte weiter zählt, ungefähr geometrisch verteilt mit Wahrscheinlichkeit p, so kommt man durchschnittlich $E(p) = 1/(1 - p) = 64/13$ Karten weiter, was $p = 51/64$ entspricht.

Mathemagisches Modell des Kruskal Counts

- Der durchschnittliche Wert einer Karte ist $(1+2+\cdots+10+2+3+4)/13 = 64/13$.
- Ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man eine Karte weiter zählt, ungefähr geometrisch verteilt mit Wahrscheinlichkeit p, so kommt man durchschnittlich $E(p) = 1/(1-p) = 64/13$ Karten weiter, was $p = 51/64$ entspricht.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei N Karten nie auf einer gemeinsamen Karte landet ist

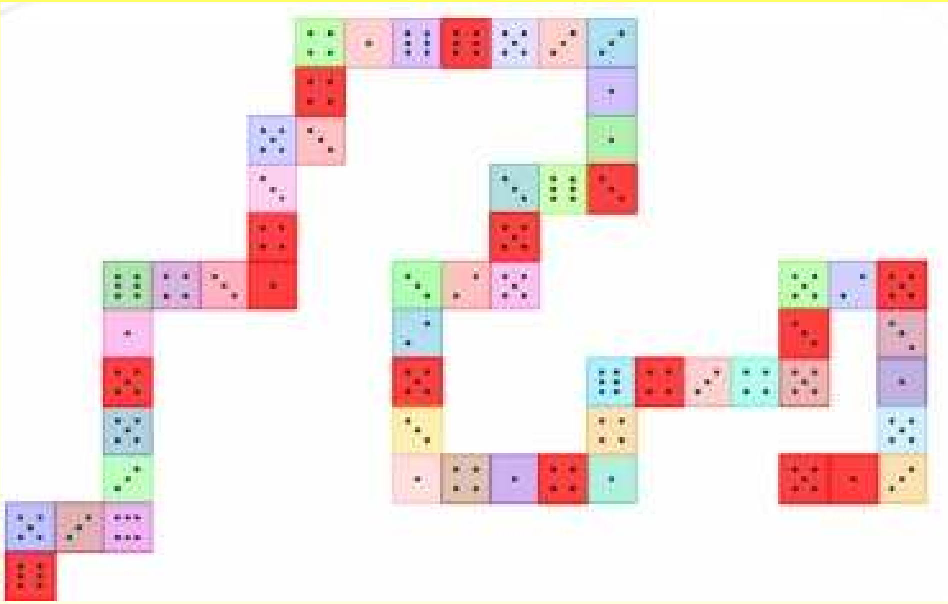
$$P(N) = \left(\frac{51}{64}\right)^N \cdot \left(2 - \frac{51}{64}\right)^N = \left(\frac{3927}{4096}\right)^N$$

was für $N = 52$ etwa $P(52) \approx 0,112$ entspricht.

Der Trick schlägt mit ca. 11,2% Wahrscheinlichkeit fehl. Die Formel für $P(N)$ ist Thema in den Übungen.

Der Trick schlägt mit ca. 11,2% Wahrscheinlichkeit fehl. Die Formel für $P(N)$ ist Thema in den Übungen.

Eine Variante dieses Tricks ist die **Würfelschlange**, wie sie z.B. im **Mathematicum** zu sehen ist.



Das Pixelgedächtnis

Das Pixelgedächtnis

Wie kann sich der mathemagische Assistent das Pixelquadrat blitzschnell so genau merken, dass er eine einzelne Pixelveränderung wahrnimmt?

Das Pixelgedächtnis

Wie kann sich der mathemagische Assistent das Pixelquadrat blitzschnell so genau merken, dass er eine einzelne Pixelveränderung wahrnimmt?

Die Lösung besteht aus einer Anwendung der **Codierungstheorie**. Der Helfer hat beim Anbringen der zusätzlichen Zeile und Spalte dafür gesorgt, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte eine ungerade Anzahl von schwarzen Pixeln ist. Er hat also ein **Parity Check Bit** angebracht.

Das Pixelgedächtnis

Wie kann sich der mathemagische Assistent das Pixelquadrat blitzschnell so genau merken, dass er eine einzelne Pixelveränderung wahrnimmt?

Die Lösung besteht aus einer Anwendung der **Codierungstheorie**. Der Helfer hat beim Anbringen der zusätzlichen Zeile und Spalte dafür gesorgt, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte eine ungerade Anzahl von schwarzen Pixeln ist. Er hat also ein **Parity Check Bit** angebracht.

Beim Umdrehen von einem Pixel wird diese Bilanz in genau einer Zeile und einer Spalte zerstört.

ENDE

ENDE

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

ENDE

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

In the end, everything is a gag.

(Charlie Chaplin)

Literatur

(1) mathematiklehren, Friedrich Verlag, bisher 186 Hefte

(2) J.C. Lagarias et al., The Kruskal count, verfügbar unter
`arxiv.org/abs/math/0110143`

(3) W. Hund (a.k.a. *Hundini*), Texte und Zauberartikel unter
`www.hund-hersbruck.de`