Übungen zur Vorlesung

Grundlagen der Mathemagie

Helmut Glas und Martin Kreuzer

ASG Passau und Universität Passau

Lehrerfortbildung "Bezaubernde Mathematik"

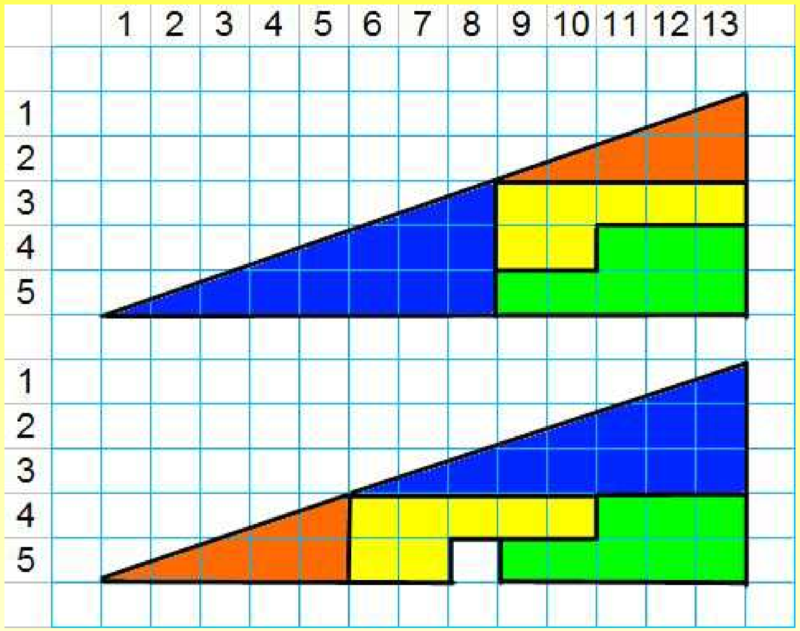
Universität Passau, 16.12.2014

5 b

5 d

Noch mehr Quadrate verschwinden

Das folgende Beispiel ist ein berühmter Fall eines **verschwindenden Quadrats**:



1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

Zahlen mit 1 und der Einer-, Zweier und Viererstelle in der Darstellung im Binärsystem

Der Kruskal Count

Beim Kartentrick **“Kruskal Count”** soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass er fehlschlägt.

Annahme: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Rahmen des Weiterzählens zur nächsten Karte weitergezählt wird, sei ungefähr geometrisch verteilt zur Wahrscheinlichkeit p.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man n Karten weiterzählt dann gleich $P(X = n) = p^{n-1}\,(1 - p)$ ist und dass $E(X) = 1/(1 - p)$ gilt.

Aufgabe 2: Beweisen Sie, dass die geometrische Verteilung **gedächtnislos** ist, d.h. dass $P(X = n + k \mid X \geq n) = P(X = k)$ gilt.

Wegen der Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung sind die ersten Faktoren in jedem der drei Produkte gleich $P(Y > n-1)$. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$\begin{aligned} P(Y > n) &= P(Y > n-1) \cdot P(\max(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}) \geq 2) \\ &= P(Y > n-1) \cdot p(2-p) \;=\; p^n \cdot (2-p)^n \end{aligned}$$

q.e.d