RUND UM DEN KREIS

Lehrerfortbildung
Universität Passau

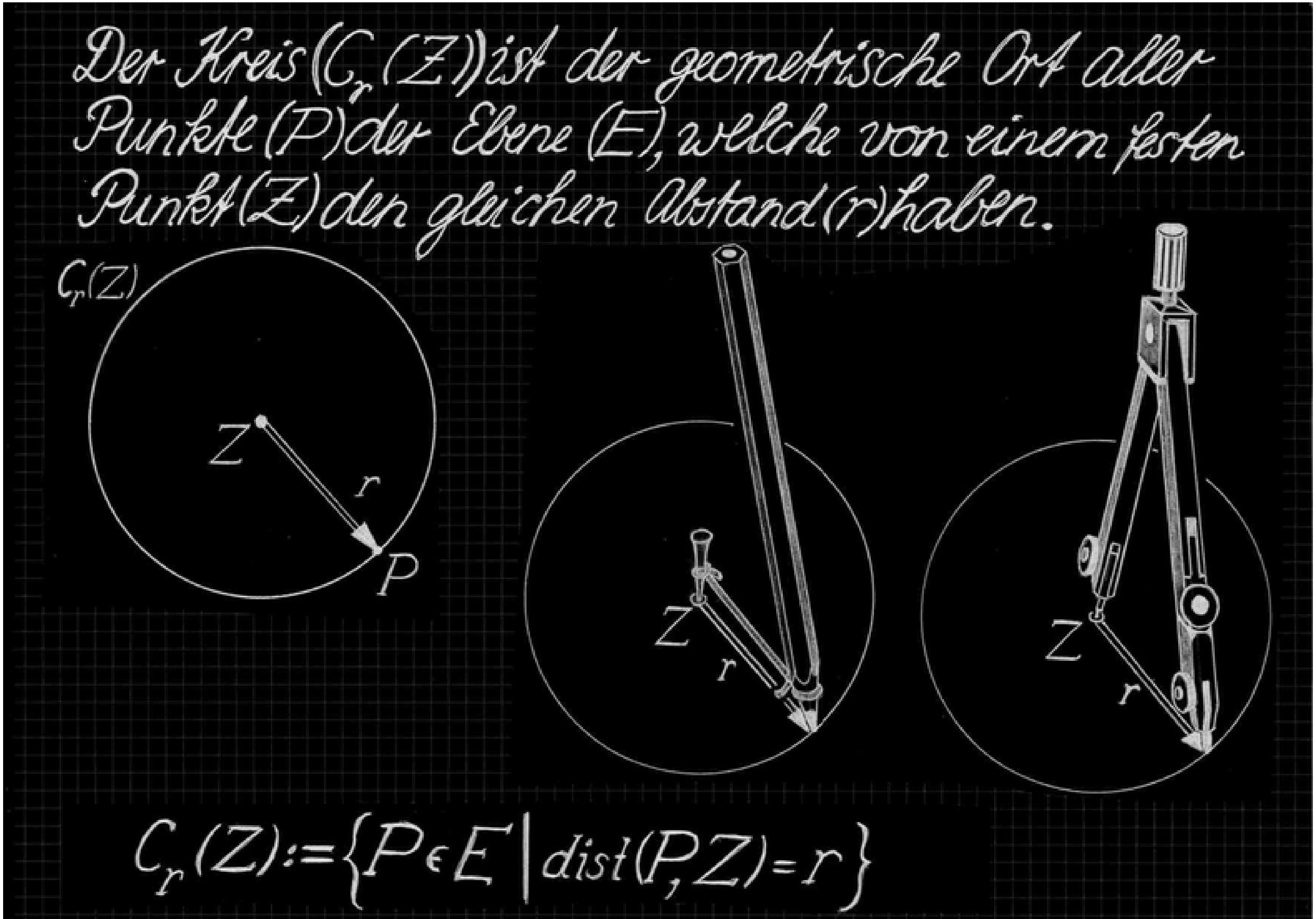
21. Dezember 2017

Markus Brodmann
Institut für Mathematik
Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190
8057 Zürich

brodmann@math.uzh.ch

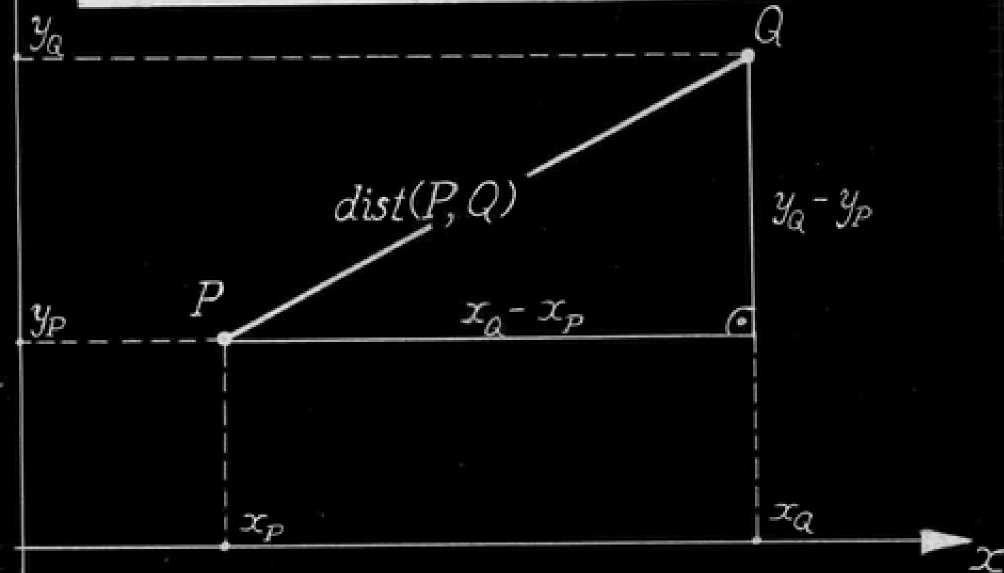
Der Kreis als geometrischer Ort – Einladende poetische Klänge

Definierende Poesie des Kreises



Was ist ein Abstand ?

$$\boxed{\mathrm{dist}(P,Q) := \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}}$$



Def: $d = d(\cdot,\cdot): E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Metrik, wenn

$\forall P, Q, R \in E$:

(1) $d(P,Q) = d(Q,P)$.

(2) $d(P,Q) \geq 0$ & $[d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q]$.

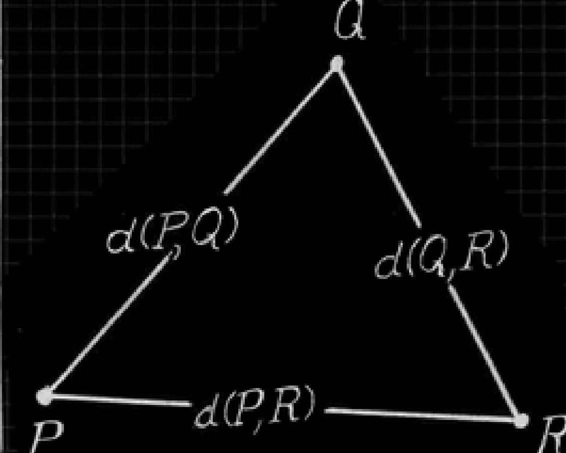
(3) (Δ-Ungleichung) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$.

Aufgaben: Zeigen Sie:

(1) $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot): E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik.

(2) In Bedingung (2) der Definition der Metrik kann man "$d(P,Q) \geq 0$" weglassen.

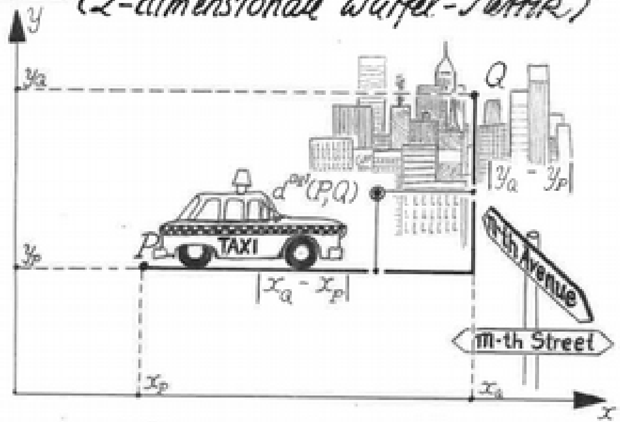
Zur Δ-Ungleichung



Metrische Kreise (und Strecken)

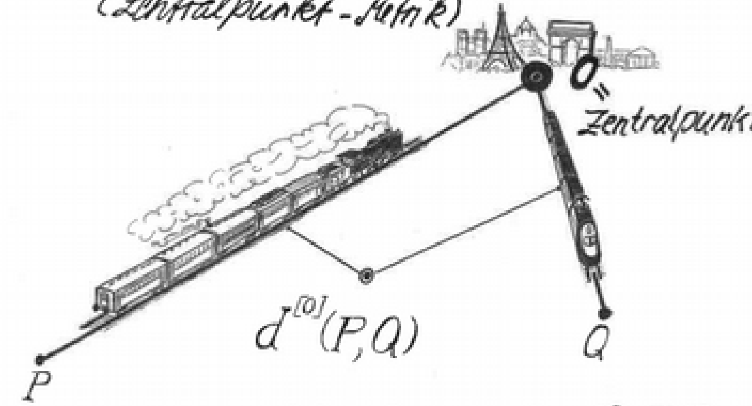
Def: ($d: E^2 \to \mathbb{R}$ = Metrik) $C_r^d(Z) := \{P \in E \mid d(P,Z) = r\}$ = Kreis mit Zentrum Z und Radius r bezüglich der Metrik d.

Beispiel: (NY-Taxi-Fahrer-Metrik)
(2-dimensionale Würfel-Metrik)



$$d(P,Q) = d^{[sq]}(P,Q) := |x_P - x_Q| + |y_Q - y_P|$$

Beispiel: (Franz. Eisenbahn-Metrik)
(Zentralpunkt-Metrik)



$$d(P,Q) = d^{[0]}(P,Q) := \begin{cases} dist(P,Q), & \text{wenn } O, P, Q \text{ kollinear;} \\ dist(P,O) + dist(O,Q), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Def: $[P,Q]^d := \{R \in E \mid d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)\}$ = Strecke zw. P und Q bez. d.

Aufgaben: Skizzieren Sie:

(3) $C_1^d(Z)$ mit $d = d^{[sq]}$, $Z = (0,1)$.

(4) $[P,Q]^d$ mit $P = (0,0)$, $Q = (1,1)$ für:
(a) $d = dist$; (b) $d = d^{[sq]}$.

Aufgaben: Skizzieren Sie (mit $O = (0,0)$):

(5) $C_2^d(Z)$ mit $d = d^{[0]}$ und $Z = (1,1)$.

(6) $[P,Q]^d$ mit $P = (1,1)$, $Q = (-1,1)$ für
(a) $d = dist$; (b) $d = d^{[0]}$.

Metrische Geometrie

Ziel: ($d : E^2 \to \mathbb{R}$ = Metrik): "Metrische Charakterisierung von E als Euklidische Ebene" durch "Axiomatische Bedingungen an d".

Axiome: ($P, Q, P', Q', P'', Q'' \in E$)

(1) $\forall t \in [0, d(P,Q)] : \exists R \in [P,Q]^d : d(P,R) = t.$

(2) $\#([P,Q]^d \cap [P',Q']^d) > 1 \Rightarrow \exists R, S \in E : [P,Q]^d \cup [P',Q']^d = [R,S]^d.$

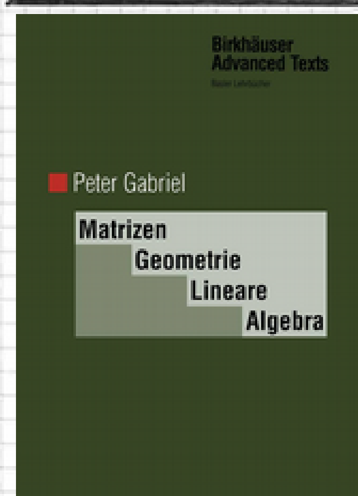
. . . . . .

Hauptsatz: (Massstabs-Satz): $P, Q \in E,\ P \neq Q \Longrightarrow$

$\exists_1\ \varphi : \mathbb{R} \to E$: (1) $\varphi(0) = P,\ \varphi(d(P,Q)) = Q,$

(2) $\forall s, t \in \mathbb{R} : d(\varphi(s), \varphi(t)) = |t - s|.$

. . . . . .



Programm:
- Geraden definieren.
- Dimensionalität und Parallelität.
- Halbgeraden
- Winkel (= Isomorphieklassen von Paaren von Halbgeraden mit gemeinsamem Ursprung.)

. . . .

„Wort-Metriken“

Def: $(\mathcal{W} \neq \emptyset)$ $d = d(\bullet,\bullet) : \mathcal{W}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *Metrik* auf $\mathcal{W}$, wenn $\forall\, P, Q, R \in \mathcal{W}$ gilt:
(1) $d(P,Q) = d(Q,P)$; (2) $d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$; (3) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$.

Aufgabe und Beispiel: $(n \in \mathbb{N}, \mathcal{A} \neq \emptyset)$ $\mathcal{W} := \mathcal{A}^n$.

(7) Zeigen Sie: Durch $((w_1, \cdots, w_n), (v_1, \cdots, v_n)) \mapsto \#\{i \in \{1, \cdots, n\} \mid w_i \neq v_i\}$ wird auf $\mathcal{W}$ eine Metrik $d_{[W]} = d_{[W]}(\bullet,\bullet) : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert, die wir "*Wort-Metrik*" nennen wollen. $\mathcal{A}$ nennen wir das *Alphabet*, die Elemente $(w_1, \cdots, w_n) \in \mathcal{W}$ nennen wir *Wörter* der Länge n.

Aufgaben: (Es gelten die obigen Bezeichnungen)

(8) Sei $r \in \mathbb{N}_0$, $Z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathcal{W}$. Definieren Sie den "*Kreis*" $C_r^d(Z)$ und die "*offene Kreisscheibe*" $U_r^d(Z)$ vom Radius r und mit Zentrum Z bezüglich $d = d_{[W]}$.

(9) Sei $r \in \mathbb{N}_0$, $Z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathcal{W}$ und $\#\mathcal{A} = m \in \mathbb{N}$. Geben Sie Formeln an für $\# C_r^d(Z)$ und $\# U_r^d(Z)$ mit $d = d_{[W]}$.

(10) Seien $P = (p_1, \cdots, p_n)$, $Q = (q_1, \cdots, q_n) \in \mathcal{W}$. Definieren Sie die "*Strecke*" $[P,Q]^d$ zwischen P und Q bezüglich $d = d_{[W]}$. Nehmen Sie an es sei $\#\mathcal{A} = m$ und geben Sie eine Formel an für $\#[P,Q]^d$.

Auf der Pirsch nach Pi – Versuch einer Annäherung

Einbeschriebene reguläre 2^n-Ecke

Not: $(r>0,\ Z\in E)$ $\mathbf{C}=C_r(Z)=\{P\in E \mid dist(P,Z)=r\}$; $d=2r$.
$P_\bullet=(P_1,\dots,P_{2^n})\in \mathbf{C}^{2^n}$ = reguläres 2^n-Eck auf $\mathbf{C}$ $(n=1,2,3,\dots)$
c_{2^n} = Umfang von $P_\bullet$; $\boxed{\pi_n := \frac{c_{2^n}}{d}}$ = "intuitiver Näherungswert für π!"

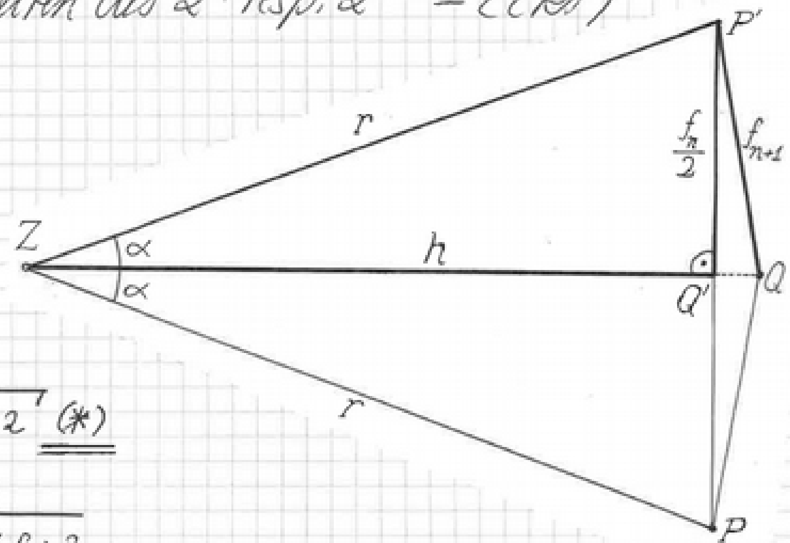
Satz: (a) $\pi_1=2$; (b) $\forall n\in\mathbb{N}: \pi_{n+1}=2^n\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}}$.

Kommentare: (A) Der Satz kann mit "Pythagoras" bewiesen werden! (vgl. Skript)
(B) Man rechnet rekursiv: $\pi_1=2{,}0<\pi_2=2.82\dots<\dots<\pi_8=3.1415\dots$.
(C) Frage: Gibt es eine Zahl π so, dass "die Zahlen π_n gegen π streben wenn n gegen ∞ geht"? Chance: Den Grenzwert-Begriff an einem interessanten und nicht-trivialen Beispiel zu reflektieren! Speziell hier: "Definition einer Zahl als Grenzwert ..."

Aufgaben: Man zeige:
(11) Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $\pi_n<\pi_{n+1}$.
(12–13) Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $\pi_n<4$.
(14) Die Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\pi:=\lim_{n\to\infty}\pi_n\le 4$.

Beweis der Rekursionsformel

$f_n = \frac{c_{2^n}}{2^n} = \frac{\pi_n d}{2^n}$; $f_{n+1} = \frac{c_{2^{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{\pi_{n+1} d}{2^n}$ (Seiten des 2^n resp. 2^{n+1}-Ecks)



Nach "Pythagoras": $h \overset{(*)}{=} \sqrt{r^2 - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2}$

" " : $f_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{f_n}{2}\right)^2 + (r-h)^2}$

Durch Term-Umformung:

$$f_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{f_n}{2}\right)^2 - (r-h)^2} = \sqrt{\left(\frac{f_n}{2}\right)^2 + r^2 - 2rh + h^2} \overset{(*)}{=}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{f_n}{2}\right)^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2} + r^2 - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2}} = \sqrt{2r^2 - 2r^2\sqrt{1 - \left(\frac{f_n}{2r}\right)^2}} \underset{(2r=d)}{=} \frac{d}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{f_n}{d}\right)^2}}.$$

Wegen $\pi_{n+1} = \frac{2^{n+1} f_{n+1}}{d}$ und $f_n = \frac{\pi_n d}{2^n}$ folgt

$$\pi_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{d} \cdot f_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{d}\,\frac{d}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n d}{2^n d}\right)^2}} = 2^n\sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}}.$$

Geschichte einer Annäherung

"Def:" $\pi := \lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$ (Vorläufige "Privat-Definition")

Historischer Abriss: (A) (Vielecke) ~250 v. Chr.: Archimedes (96-Eck) $\pi \approx 3{,}14$.

1610: Ludolph van Ceulen (2^{62}-Eck) 35 Dezimalstellen.

(B) (Analysis) 1628: G. W. Leibniz $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan(1)$

1706: J. Machin $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \Rightarrow$ 100 Dezimalstellen

(C) (Computer) 1949: G. W. Reitweiser (auf ENIAC) 1000 Dezimalstellen

2016: $22{,}4 \times 10^{12}$ Dezimalstellen ...

$\pi = 3$: (Babylon, Ägypten) Bibel AT: 1 Könige 7,23-26 (Hiram von Tyrus)

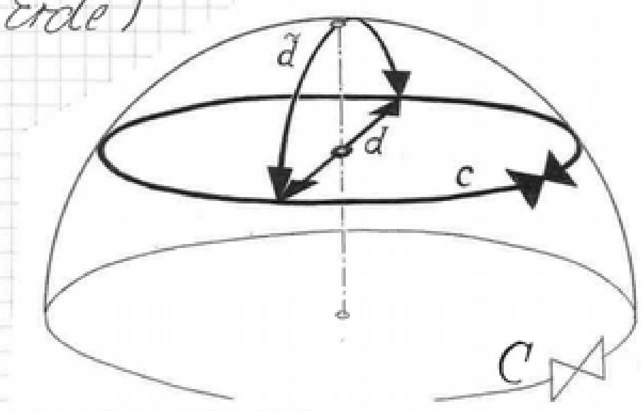
Aufgabe: $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ = Sphäre (Breitenkreis $\subseteq$ Erde)

C = Umfang von $\mathcal{S}$, c = Umfang von $\mathcal{C}$

$\tilde{d}$ = sphärischer Durchmesser von $\mathcal{C}$

(22) Man wähle $\gamma := \frac{c}{C}$ 10, dass

$\tilde{\pi} := \frac{c}{\tilde{d}} = 3$



Umbeschriebene reguläre 2^n-Ecke

Not: $\overline{P}_\bullet = (\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_{2^n})$ = reguläres 2^n-Eck, C umbeschrieben. $(n = 1, 2, 3, \dots)$

$\overline{c}_{2^n}$ = Umfang von $\overline{P}_\bullet$; $\overline{\pi}_n := \frac{\overline{c}_{2^n}}{d}$ = "intuitiver Näherungswert für π".

Satz: (a) $\forall\, n \geq 2 : \overline{\pi}_n = \pi_n \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}}$; (b) $\forall\, n \geq 2 : \pi_n < \overline{\pi}_n$;

(c) $\forall\, n \geq 1 : \pi_n < \pi_{n+1}$; (d) $\forall\, n \geq 2 : \overline{\pi}_n > \overline{\pi}_{n+1}$;

(e) $\forall\, n > 3 : \overline{\pi}_n - \pi_n < \frac{1}{2^{2n-8}\sqrt{15}}$.

Korollar: $\lim_{n \to \infty} \overline{\pi}_n = \lim_{n \to \infty} \pi_n = \pi$, wobei für alle $n > 3$ gilt

$$\pi_n < \pi < \overline{\pi}_n < \pi_n + \frac{1}{2^{2n-8}\sqrt{15}} .$$

Kommentar: (A) Die Abschätzung kann mit "Pythagoras" bewiesen werden.

(B) Chance: Den Begriff der Abschätzung zu reflektieren.

Aufgabe: Zeigen Sie und kommentieren Sie im Hinblick auf Ludolph v. C.:

(25) Ist $n \geq 62$, so gilt $|\pi_n - \pi| < 10^{-35}$.

Die Rektifizierbarkeit des Kreises 1

$\boxed{\text{Ziel: Die "vorläufige Privatdefinition" } \pi := \lim_{n\to\infty} \pi_n \text{ rechtfertigen!}}$

$\boxed{\text{Methode: Analytische Begründung: Trigonometrie und Kreisgeometrie!}}$

Repetition: (Analysis I): (A) (Analytische Begründung der Trigonometrie)

Es gibt genau ein Paar von Funktionen $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ mit den Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \forall x,y\in\mathbb{R}: \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x).\\ (2)\ \forall x,y\in\mathbb{R}: \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).\end{array}\right\} \text{"Additions-theoreme"}$$

(3) $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ sind stetig an der Stelle 0.

(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1.$

(B) (Analytische Definition der Zahl "π"): Die Funktion $\sin(\cdot)$ hat eine kleinste positive Nullstelle: $\exists_1 \hat{\pi}\in\mathbb{R}_{>0}: \sin(x) \begin{cases} =0, & x=\hat{\pi} \\ \neq 0, & 0<x<\hat{\pi}\end{cases}.$

(C) (Analytische Beschreibung des Kreises (mit $Z=(0,0)$)):

$$\boxed{\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ t\mapsto \varphi(t) := (r\cos(t), r\sin(t)), \ (\Rightarrow \varphi(\mathbb{R})\subseteq C)}$$

$\forall P\in C: \exists_1\ t\in[0,2\hat{\pi}[: \varphi(t) = P$ (Standard-Parameterdarstellung)

$\forall s,t\in[0,2\hat{\pi}[: s<t \Rightarrow \operatorname{dist}(\varphi(s),\varphi(t)) = 2r\sin\left(\frac{t-s}{2}\right)$

Die Rektifizierbarkeit des Kreises 2

(D) (Partitionen) Eine Partition (von $[0, 2\hat{\pi}[$) ist eine Folge $t_\bullet = (t_1, \dots, t_n)$ mit $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n < 2\hat{\pi}$. $(t_{n+1} := 2\hat{\pi} + t_1)$.

$f(t_\bullet) := \max\{ t_{i+1} - t_i \mid i = 1, \dots, n\}$ = Feinheitsgrad von $t_\bullet$

(E) (Vielecke) Sei $t_\bullet$ eine Partition. Sei $P_i = \varphi(t_i) (\in C)$ $(i = 1, \dots, n+1)$.
Die Folge $P_\bullet = \varphi(t_\bullet) = (P_1, \dots, P_n)$ ist das durch $t_\bullet$ auf C definierte Vieleck. $f(P_\bullet) := f(t_\bullet)$ heisst Feinheitsgrad von $P_\bullet$

Für den Umfang von $P_\bullet$ gilt $\boxed{c_{P_\bullet} := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dist}(P_i, P_{i+1}) \underset{(C)}{=} 2r \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right)}$

Satz: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall P_\bullet = \varphi(t_\bullet):$

$$f(P_\bullet) < \delta \Longrightarrow \left| c_{P_\bullet} - d \cdot \hat{\pi} \right| < 0$$

{Rektifizierbarkeit des Kreises}

Korollar: Ist $P_\bullet^{[1]}, P_\bullet^{[2]}, \dots$ eine Folge von Vielecken auf C, mit $\lim_{k \to \infty} f(P_\bullet^{[k]}) = 0$, so gilt $\lim_{k \to \infty} c_{P_\bullet^{[k]}} = d \cdot \hat{\pi}$.

Korollar: Die Definition $\pi = \lim_{n \to \infty} \pi_n$ ist gerechtfertigt und es gilt $\pi = \hat{\pi}$.

Beweis der Rektifizierbarkeit

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Longrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so, dass

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2r\hat{\pi}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ mit } |x| < \delta(\varepsilon).$$

ε festhalten, $\delta := \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \boxed{|\sin(x) - x| \underset{(*)}{\leq} |x| \frac{\varepsilon}{2r\hat{\pi}}, \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta.}$

Sei $t_0 = (t_1, \dots, t_n)$ $(0 \leq t_1 < \dots < t_n < 2\hat{\pi})$ eine Partition mit $f(t_0) < \delta$.
Es gilt $\frac{t_{i+1} - t_i}{2} < \frac{f(t_0)}{2} < \frac{\delta}{2} < \delta$ für $i = 1, \dots, n$. Mit $(*)$ folgt

$$(**) \left| \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) - \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right| < \left| \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right| \frac{\varepsilon}{2r\hat{\pi}} = (t_{i+1} - t_i) \frac{\varepsilon}{4r\hat{\pi}} \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Es folgt $|c_{P_0} - d\hat{\pi}| = |c_{P_0} - 2r\hat{\pi}| = \Big| \underbrace{2r \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{t_{i+1} - t_i}{2}}_{c_{P_0}} - \underbrace{2r\hat{\pi}}_{r\sum_{i=1}^{n}(t_{i+1} - t_i)} \Big| = \dots$

$$= 2r \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) - \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right) \right| \leq 2r \sum_{i=1}^{n} \left| \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) - \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right|$$

$$\overset{(**)}{<} 2r \sum_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i) \frac{\varepsilon}{4r\hat{\pi}} = \frac{\varepsilon}{2\hat{\pi}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i)}_{= 2\hat{\pi}} = \frac{\varepsilon}{2\hat{\pi}} \hat{\pi} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

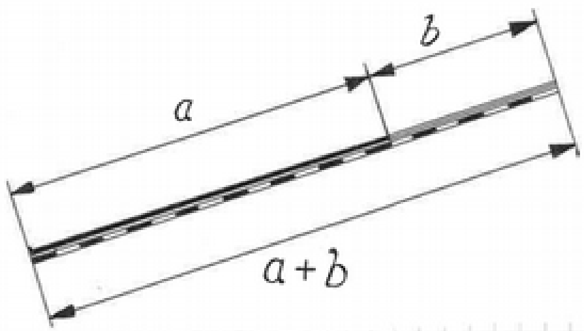
Die Quadratur des Kreises

Arithmetik mit Zirkel und Lineal 1

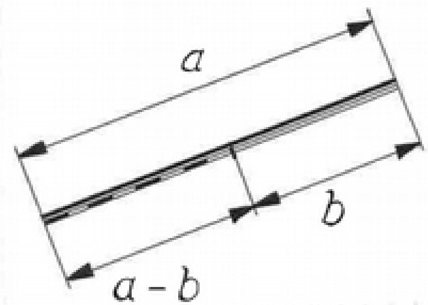
Problem: Man konstruiere aus einer Einheits-Strecke mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge π.

Frage: Welche Zahlen $\ell \in \mathbb{R}$ sind konstruierbar, d.h. treten als Länge einer Strecke auf, die aus einer Einheits-Strecke mit Zirkel und Lineal konstruiert wurde?

Repetition: Die vier arithmetischen Grund-Operationen und das Ziehen von Quadratwurzeln lassen sich mit Zirkel und Lineal durchführen!
(Not: $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \geq b$):

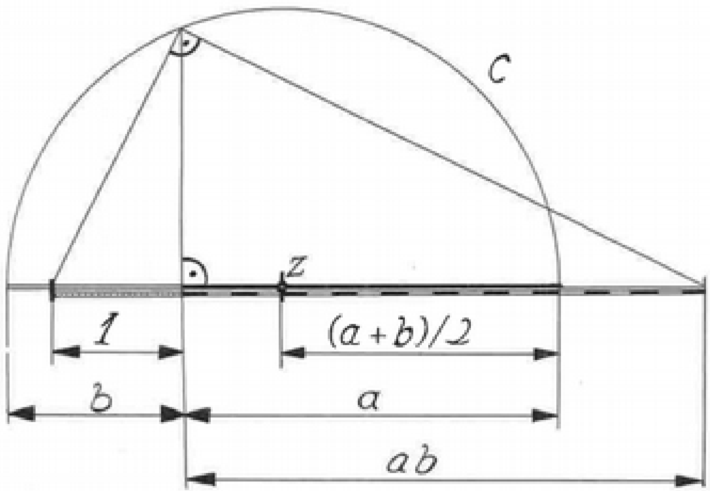


Addition

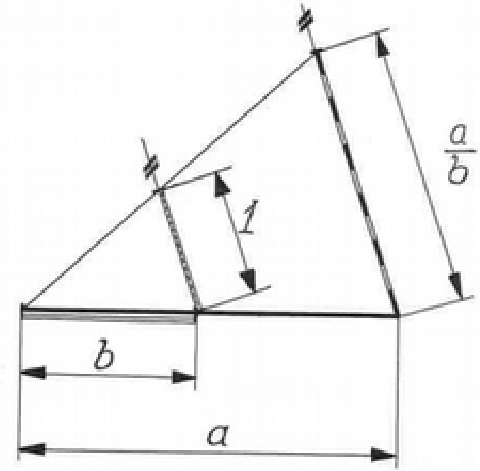


Subtraktion

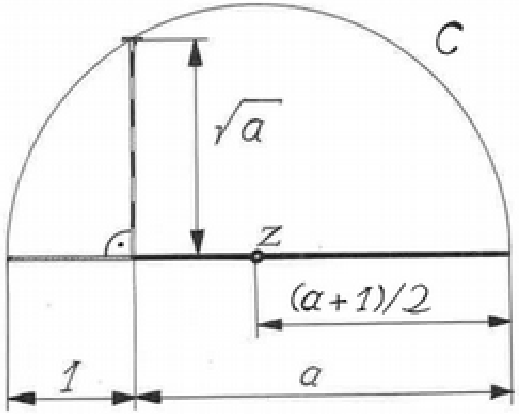
Arithmetik mit Zirkel und Lineal 2



Multiplikation



Division



Ziehen von Quadratwurzeln

Aufgaben: Geben Sie sich eine Einheitsstrecke vor und konstruieren Sie

(30) (d) $a=\sqrt{1+\sqrt{3}}$; (e) $a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}$.

(31) Mit $0<a<b$:

(a) $\sqrt{a^2+b^2}$; (b) $\sqrt{b^2-a^2}$;

(c) $\sqrt{ab}$; (f) $a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Konstruiebare Zahlen

<u>Definition und Bemerkung:</u> (A) $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ heisst <u>konstruktiv abgeschlossen</u> (ein <u>Unterkörper von</u> $\mathbb{R}$), wenn:

(1) $1 \in \mathcal{S}$.

(2) $\forall a, b \in \mathcal{S} : a + b \in \mathcal{S}$.

(3) $\forall a, b \in \mathcal{S} : a - b \in \mathcal{S}$.

(4) $\forall a, b \in \mathcal{S} : ab \in \mathcal{S}$.

(5) $\forall a \in \mathcal{S}, \forall b \in \mathcal{S} \setminus \{0\} : \frac{a}{b} \in \mathcal{S}$.

(6) $\forall a \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}_{\geq 0} : \sqrt{a} \in \mathcal{S}$.

$\mathbb{R}$ ist konstruktiv abgeschlossen, $\mathbb{Q}$ nicht. Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ konstruktiv abgeschlossen, so gilt $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{S}$.

(B) $\mathbb{K} := \bigcap_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \mid \mathcal{S} \text{ konstr. abgeschlossen}\}} \mathcal{S}$ = kleinster konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von $\mathbb{R}$ = <u>Körper der konstruierbaren Zahlen</u>.

$\ell \in \mathbb{K} \iff$ Eine Strecke der Länge $|\ell|$ lässt sich mit Zirkel und Lineal aus der Einheitsstrecke konstruieren. (~C.F. Gauss, 1795)

<u>Bemerkung:</u> $\boxed{\text{Quadratur des Kreises} \iff \pi \in \mathbb{K}}$

<u>Aufgaben:</u> (32-33) Formulieren Sie die Beziehung $\sin(x) \in \mathbb{K}$ in geometrischen Termen und sagen Sie, was Sie im Fall $x = \frac{\pi}{9}$ wissen.

Die Transzendenz von Pi

Ziel: Zu "zeigen" $\pi \notin \mathbb{K}$ (d.h. "Quadratur des Kreises unmöglich")

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) Es besteht eine Gleichung $q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \dots + q_0 = 0$ mit $q_0, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$, $q_n \neq 0$.

(ii) Der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}[a] = \{\sum_{j=0}^{m} q_j \cdot a^j \mid m \in \mathbb{N}_0; q_0, \dots, q_m\}$ hat Dimension $\leq n$.

Definition: $a \in \mathbb{R}$ heisst (reelle) algebraische Zahl, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ so gibt, dass die obigen äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.

Wir setzen $\mathbb{A} := \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ ist eine algebraische Zahl}\}$.

Die Zahlen $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ heissen transzendente (reelle) Zahlen.

Satz: $\mathbb{A}$ ist ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von $\mathbb{R}$.

Korrollar: $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{A}$, d.h. konstruierbare Zahlen sind algebraisch.

Hauptsatz: (F. Lindemann, 1882) π ist transzendent, d.h. $\pi \notin \mathbb{A}$

Korollar: $\pi \notin \mathbb{K}$: Die Quadratur des Kreises ist unmöglich.

Aufgabe: (34) Zeigen Sie: $\mathbb{A}$ und $\mathbb{K}$ sind abzählbar...