

---

Markus P. Brodmann, Universität Zürich

# Rund um den Kreis

Ein Kurs für Lehrpersonen der Mathematik  
an Sekundarschulen und Gymnasien

20. Dezember 2017

Begleitskript mit Kommentaren und Aufgaben

Institut für Mathematik der Universität Zürich

---

## Vorwort zur Weiterbildungsveranstaltung für Mathematiklehrpersonen in Zürich

Vor mehr als 35 Jahren fuhr der Autor – als (von der damaligen “Westfälischen Wilhelms-Universität Münster”) frisch habilitierter wissenschaftlicher Mitarbeiter am Forschungsinstitut für Mathematik der ETH – auf dem abendlichen Heimweg im Zug am Werkgelände der vormaligen BBC (heute ABB) vorbei. Dort erblickte er einige zwar neu aussehende, aber doch sehr einfach und altmodisch wirkende kranähnliche Geräte. Diese mussten auch andern Mitreisenden aufgefallen sein, denn ein in Baden eingestiegener Fahrgast erklärte im Abteil nebenan einem fragenden Passagier fachkundig, dass es sich um Geräte handle, die für den Export in ein Entwicklungsland bestimmt seien.

Das Hintergrunds-Manuskript [Br1] zu unserem Kurs ist im eigentlichen Sinne auch als Export-Produkt für ein Entwicklungsland entstanden, nämlich als Grundlage für einen Bildungswoche für Mathematiklehrpersonen in der Region Kabale im Südwesten Ugandas, die im April 2014 am St. Mary’s College in Rushoroza stattfand. In Analogie zum oben Gesagten, kann man auch dieses Exportprodukt ruhig als “einfach und altmodisch” bezeichnen. Denn das Thema – der Kreis – ist ja elementar und wohl so alt wie das Nachdenken über die Geometrie selbst. Aber gerade dadurch ist das Thema auch so klassisch, dass es überall in der Welt zum Unterrichtsstoff an Mittelschulen gehört. Deswegen kann ein “Rückimport” des exportierten Produkts aus dem Entwicklungsland in unser Wohlstandsland verantwortet werden.

Dass solche Rückimporte recht nützliches leisten können, hat sich für den Autor schon einmal am Vorlesungskript [Br-Fu-Ro] “First Lectures in Local Cohomology” gezeigt. Dieses Skript ist nämlich auch als (ausgebauter) Rückimport eines Vorlesungsskripts für einen Kurs in Quy Nhon (Vietnam) entstanden (siehe [Br2]), und wurde dann in Zürich für eine ganze Reihe von Studierenden zum “Eingangstor” in die Lokale Kohomologietheorie und zur Einladung, sich in das Buch [Br-Sh] zu vertiefen.

Wir fühlen uns deshalb auch im Fall des Skripts [Br1] zum Rückimport ermutigt und hoffen auf einen vergleichbaren Effekt.

Mathematik-Lehrpersonen an “High Schools” in Uganda, genauer, Lehrerinnen und Lehrer, die an “Secondary Schools” auf “A-Level” Mathematik unterrichten, sind natürlich nicht in den Genuss eines vollwertigen Diplom- oder Master-Studiums in Mathematik gekommen, wie das in der Schweiz der Fall ist. Die fachwissenschaftliche Ausbildung der angesprochenen Lehrpersonen in Uganda entspricht eher dem, was in Zürich für Lehramts-Studierende der Sekundarstufe 1 üblich ist. Entsprechend ist der “fachliche Überhang” des Skripts für die Verhältnisse in Uganda recht gross. Der genannte Überhang

wurde bewusst eingeplant, weil sich unser Kurs auch an “University Instructors in Mathematics Education” wandte, verglichen mit Zürcher Verhältnissen also an “Dozierende der Fachdidaktik in Mathematik”. Wir hoffen, dass dieser Überhang so gross ist, dass auch Zürcher Lehrpersonen an Maturitätsschulen den Kurs nicht gleich als trivial oder banal zur Seite legen werden.

## **Vorwort zur Lehrerfortbildungsveranstaltung in Passau**

Ersetzen Sie im obigen Vorort “Zürich” durch “Bayern” und “Schweiz” durch “Deutschland”.

### **Hinweise zum Kurzsript**

Das vorliegende Kurzsript und unser Kurs wollen nicht in erster Linie Dinge vorstellen, welche direkt in den Schul-Unterricht übernommen werden können. Es geht uns also nicht um einen “Kurs in Fachdidaktik”. Wir wollen vielmehr aufzeigen, wie viel gehaltvolle und tiefe Mathematik “rund um den Kreis” zu finden ist. Es geht uns also um einen “Kurs zur Fachwissenschaftlichen Vertiefung”. Wir gehen davon aus, dass unsere Zuhörerschaft in den Genuss einer guten Fachausbildung gekommen ist, und erlauben uns daher auch hin und wieder Dinge und Denkweisen ins Spiel zu bringen, die bis ins erste Studienjahr hineingreifen. Andererseits versuchen wir auch mit möglichst elementaren Hilfsmitteln mathematisch Interessantes “herauszuwirtschaften”. Wir hoffen dass uns das einigermaßen gelungen ist.

Das vorliegende Kurzsript (das mittlerweile die Vorsilbe “kurz” nicht mehr so ganz verdient) besteht nicht einfach nur aus Auszügen aus dem ursprünglichen Skript [Br1]. Einiges ist neu dazugekommen: persönlich-anekdotesches, historisches aber auch eigentlich mathematisches. Die persönlich-anekdoteschen Einschübe sind vor allem dem Eindruck entsprungen, dass mathematisches Interesse schon in früher Jugend aufkeimen kann, und welche wichtige Rolle der einzelne Lehrer bei dessen Förderung spielt. Die dazugekommenen historischen Hinweise sollen vermehrt aufzeigen, welche lange und vielfältige Entwicklung die “Mathematik des Kreises” hat. Auf der rein mathematischen Seite ist beispielhaft eine knappe Darstellung des analytischen Zugangs zur “Mathematik des Kreises” hinzugekommen – ein Zugang, der nur das Paar bestehend aus der Sinus- und der Cosinus-Funktion axiomatisch definiert und darauf dann die ganze “Welt des Kreises” aufbaut.

# Der Kreis als geometrischer Ort – Einladende poetische Klänge

## Definierende Poesie des Kreises

**Definition.** (Zu lernen vom Vortragenden im Jahre 1958 an der damaligen Realschule in Therwil bei Basel): Der *Kreis* ( $\mathcal{C}_r(Z)$ ) ist der *geometrische Ort* aller Punkte ( $P$ ) in der Ebene ( $E$ ), welche von einem festen Punkt ( $Z$ ) den gleichen Abstand ( $r$ ) haben.

**Bemerkung.**  $Z$  heisst das *Zentrum* oder der *Mittelpunkt* des Kreises,  $r$  heisst der *Radius* des Kreises und  $d = 2r$  heisst der *Durchmesser* des Kreises.

**Kommentar.** (A) Die fast poetisch klingende Definition ist eingängig wegen ihrer offenbar ersichtlichen praktischen Deutung (vgl. Figure 1.1 und Figure 1.2 in [Br1]), anders als etwa Carl Spitteler's begeistert-patriotische Ballade "Die jodelnde Schildwache" (siehe [Sp]), die im Fach Deutsch etwa gleichzeitig im Lehrplan stand.

(B) In den folgenden Jahren wurde an den Baslern Realschulen und Gymnasien schrittweise die Behandlung der Grundbegriffe der Mengenlehre eingeführt. Unser damaliger Mathematiklehrer am MNG Basel, Dr. Rolf Conzelmann, griff das Thema geschickt auf. So stand es dann im Jahre 1964 bald einmal an der Wandtafel (vgl. Figure 1.4 in [Br1]):

**Definition.**  $\mathcal{C}_r(Z) := \{P \in E \mid \text{dist}(P, Z) = r\}$ .

**Kommentar.** (A) Natürlich fühlten wir uns schon als angehende Akademiker – einige von uns sogar mit Philosophie im Nebenfach. So ging es nicht mehr an, den Begriff des *Abstands* oder der *Distanz* zwischen zwei Punkten  $P$  und  $Q$  unreflektiert als etwas zu akzeptieren, das man mit Spannen von Schnüren oder durch Abgreifen mit dem Zirkel verstehen konnte. Exakteres und "a prioriescheres" musste da her.

(B) Doch wir hatten ja bereits "Cartesische" oder "Analytische Geometrie" kennengelernt, und so konnte man uns den Abstands begriff mindestens exakt definieren, beruhend auf der Idee des Satzes von Pythagoras, der uns durch den häufigen Gebrauch bereits in Fleisch und Blut übergegangen war.

(C) Mit dem Stichwort "Pythagoras" ist für den Vortragenden noch eine weitere frühe Erinnerung an ein Stück "mathematischer Poesie" verbunden: Wohl

um das Jahr 1955 rezitierte seine Mutter in fast bühnenreifem Pathos unvermittelt den Satz: *”Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.”* Der Vater, seines Zeichens Realschul-Lehrer in Biologie und Mathematik, schmunzelte dazu, denn die Mutter war ja in der Familie allgemein als mathematisch unbegabt eingestuft. Der misstrauische Sohn schlug danach insgeheim in einem herumliegenden Geometrie-Schulbuch des Vaters nach und fand das von der Mutter deklamierte Gedicht und dazu eine erläuternde Figur, welche die geheimnisvollen Worte einsichtig machte. Jahre später gestand die Mutter dem Sohn aber ein, dass sie nie geglaubt hätte, was sie da sagte. Dieser Herr Pythagoras müsse sich getäuscht haben: Die beiden kleineren Quadrate hätten doch niemals nebeneinander Platz im grösseren. Aber immerhin habe ihr der Herr Lehrer die Note aufgebessert, weil sie ihr Pythagoras-Gedicht so flott dahergesagt habe... Damit soll mehr oder weniger ernsthaft auch die Anregung gemacht sein, für eine Lehrerfortbildung vielleicht einmal ein Thema wie *Poesie in der Mathematik* ins Auge zu fassen.

## Was ist ein Abstand?

Doch nun wieder zurück zur Frage, was denn ein Abstand zwischen zwei Punkten sei. Natürlich stand das im Rahmen der ”Cartesischen Geometrie” öfter an der Wandtafel, etwa in der Form:

**Definition.** (*Cartesische Fassung des Abstandsbegriffes*): Der *Abstand* oder die *Distanz* zwischen den beiden Punkten  $P, Q \in E$  mit den Koordinaten  $x_P, y_P$  respektive  $x_Q, y_Q$  ist gegeben durch (vgl. Figure 1.4 in [Br1])

$$\text{dist}(P, Q) := \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$

**Kommentar.** (A) Natürlich stellten einige kritische Geister die Frage, ob man den Abstandsbegriff und damit den Kreis wirklich nur mit Hilfe von Koordinaten verstehen könne. Man hatte uns ja erzählt, dass der ”Koordinaten-Vater” Descartes erst im 16. Jahrhundert gelebt hat, dass aber schon in der Antike eine hoch entwickelte Kreisgeometrie bestand. Wussten etwa die alten Griechen gar nicht, worüber sie sprachen, wenn sie ihre Sätze über Kreise bewiesen?

(B) Unser Lehrer Dr. Conzelmann, ahnte wohl, was da einigen kritischen Skrupulanten durch den Kopf ging und bemerkte eines Tages, es gäbe in der Tat eine ”mathematische Theorie die sich mit Abständen befasse.” Diese sei aber doch zu abstrakt um in der Schule behandelt zu werden”. Er ergänzte auch, dass es da sogar eine Theorie gäbe, die nur danach frage, wann ein ”Punkt in der Nachbarschaft eines anderen liege” und er sprach das Wort *”Analysis Situs”* aus. Der Vater – ehemaliger Kommilitone von Dr. Conzelmann – auf den genannten Begriff angesprochen, bemerkte dazu: ”Geometrie der Lage” – mit einem Unterton, der anzudeuten schien: ”Etwas für Leute,

die in Mathematik doktorieren wollen.”

Erst in seinem zweiten Studien-Semester an der Universität Basel konnte sich der Vortragende zum Ganzen seinen Reim machen: Da war von ”*Metriken*” und von ”*Topologie*” die Rede gewesen. Jetzt konnte er auch die von Dr. Conzelmann gemachte Bemerkung wirklich begreifen: ”Die Mathematiker versuchen nicht, Objekte an sich zu verstehen, sondern interessieren sich für ihre Eigenschaften und für die Beziehungen zwischen diesen Objekte”.

Obwohl Dr. Conzelmann uns die Definition der Metrik vorenthielt, sei sie nun aufgeschrieben:

**Definition.** (*Der Begriff der Metrik der Ebene*) Es bedeute  $E^2 = E \times E := \{(P, Q) \mid P, Q \in E\}$ . Eine *Metrik* der Ebene  $E$  ist eine Abbildung

$$d = d(\bullet, \bullet) : E^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

so, dass für alle  $P, Q, R \in E$  gilt (vgl. Figure 1.3 in [Br1]):

- (1) (*Symmetrie*)  $d(P, Q) = d(Q, P)$ ;
- (2) (*Definitheit*)  $d(P, Q) \geq 0$ , wobei  $d(P, Q) = 0$  genau dann, wenn  $P = Q$ .
- (3) (*Dreicks-Ungleichung*)  $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ .

**Aufgaben.** Zeigen Sie:

- (1)  $\text{dist}(\bullet, \bullet) : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $((P, Q) \mapsto \text{dist}(P, Q))$  ist eine Metrik. (Hinweis: Sollte die Versuchung auftauchen, mit dem Skalarprodukt zu argumentieren: Es herrscht ”Cosinus-Verbot”.)
- (2) In der Definitheits-Bedingung (2) der Definition der Metrik kann man die Bedingung ” $d(P, Q) \geq 0$ ” weglassen.

**Kommentar.** Im Gegensatz zur Äusserung von Dr. Conzelmann kam der Vortragende später zum Schluss, dass Metriken ein Thema sind, das auch schon am Gymnasium mit beidseitigem Spass behandelt werden kann. Dies geschah zwar nicht beim Unterrichten am Gymnasium, sondern beim mehrmaligen Erteilen der Vorlesung ”Geometrie I für Studierende des Lehramts an der Sekundarstufe 1” – für eine Hörerschaft also, die durchaus mit Gymnasiasten vergleichbar ist. Diese Erfahrung konnte er machen im Rahmen eines eigentlichen pädagogisch-didaktischen Abenteuers, das man mit ”*Metrische Geometrie*” benennen könnte – ein Abenteuer, das noch später noch zur Sprache kommen wird.

## Metrische Kreise (und Strecken)

Nun verfügen wir über einen Abstands- ooder Distanzbegriff, der es uns erlaubt, Kreise viel allgemeiner zu definieren als bisher:

**Definition.** (*Der Begriff des Kreises bezüglich einer Metrik*) Es sei  $d :: E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik der Ebene  $E$ , es sei  $Z \in E$  und  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Dann ist

$$\mathcal{C}_r^d(Z) := \{P \in E \mid d(P, Z) = r\}$$

der *Kreis* in der Ebene  $E$  mit Zentrum  $Z$  und Radius  $r$  bezüglich der Metrik  $d$ .

Als Beispiele von Metriken der Ebene betrachten wir:

**Beispiel.** (Die 2-dimensionale Würfel-Metrik, auch Quadrat-Metrik oder *New-York-Taxi-Fahrer-Metrik*) Es handelt sich um die Metrik  $d = d^{[sq]} = d^{[sq]}(\bullet, \bullet) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch (vgl. Figure 1.5 in [Br1]):

$$d(P, Q) = d^{[sq]}(P, Q) := |x_Q - x_P| + |y_Q - y_P|,$$

wobei  $x_P, y_P$  respektive  $x_Q, y_Q$  die Koordinaten von  $P$  und  $Q$  sind.

**Beispiel.** (Die Zentralpunkt-Metrik oder *Französische Eisenbahn-Metrik*) Es handelt sich um die Metrik  $d = d^{[O]} = d^{[O]}(\bullet, \bullet) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch (vgl. Figure 1.6 in [Br1]):

$$d(P, Q) = d^{[O]}(P, Q) := \begin{cases} \text{dist}(P, Q), & \text{wenn } O, P, Q \text{ kollinear sind} \\ \text{dist}(P, O) + \text{dist}(O, Q), & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei  $O \in E$  ein fester Punkt ist, der sogenannte *Zentralpunkt* der Metrik.

Zur Geometrie gehören aber bekanntlich nicht nur Kreise, sondern auch Strecken. Hat man nur eine Metrik zur Verfügung, so liegt es nahe zu definieren:

**Definition.** (*Der Begriff der Strecke bezüglich einer Metrik*) Es sei  $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik der Ebene  $E$  und es seien  $P, Q \in E$ . Die *Strecke* zwischen  $P$  und  $Q$  bezüglich der Metrik  $d$  ist dann gegeben durch

$$[P, Q]^d := \{R \in E \mid d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)\}.$$

**Bemerkung.** Ab jetzt schreiben wir  $P = (x, y)$ , wenn  $P \in E$  der Punkt mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  ist – und identifizieren damit  $E = \mathbb{R}^2$ .

**Aufgaben.** Skizzieren Sie:

- (3)  $\mathcal{C}_1^d(Z)$  mit  $d = d^{[sq]}$  und  $Z = (0, 1)$ ;
- (4)  $[P, Q]^d$  mit  $P = (0, 0)$  und  $Q = (1, 1)$  für: (a)  $d = \text{dist}$ ; (b)  $d = d^{[sq]}$ .

**Aufgaben.** Skizzieren Sie (mit  $O := (0, 0)$ ):

- (5)  $\mathcal{C}_1^d(Z)$  mit  $d = d^{[O]}$  und  $Z = (1, 1)$ ;
- (6)  $[P, Q]^d$  mit  $P = (1, 1)$  und  $Q = (-1, 1)$  für: (a)  $d = d^{[sq]}$ ; (b)  $d = d^{[O]}$ .

## Metrische Geometrie

**Vorbemerkung.** (A) Kurz wollen wir nun auch auf das schon erwähnte pädagogisch-didaktische Abenteuer “Metrische Geometrie” eintreten, das sich im Zusammenhang mit der Zürcher Vorlesung “Geometrie I für Studierende des Lehramts an der Sekundarstufe 1” abgespielt hat. Auslöser des Abenteuers war die Tatsache, dass der Vortragende im Erteilen der genannten Vorlesung seinen im Jahr 2015 verstorbenen Zürcher Kollegen Peter Gabriel ablöste,

der damals an seinem Buch [Ga] über “Matrizen, Geometrie und Lineare Algebra” arbeitete. Gabriel ging davon aus, dass sein entstehendes Buch in seinen einführenden Teilen auch Studierenden des Lehramts der Sekundarstufe 1 zugänglich sein sollte und nahm so Teile des Buchmanuskripts als Grundlage für seine Vorlesung.

(B) Der Vortragende war von Gabriels neuartigem Gestaltungsvorschlag zur genannten Vorlesung angetan und übernahm in der Folge dieses Vorlesungskonzept. Er übernahm die ihm freundlicherweise von Kollege Gabriel zur Verfügung gestellten Manuskript-Auszüge und modifizierte diese wie es ihm für die Vorlesung passend erschien. Ein wichtiger Teil der Vorlesung war den Matrizen gewidmet, insbesondere der “Reduktion auf Treppenform” und zwar mit Hilfe des von Gabriel so genannten “Fang-Cheng-Algorithmus”, wie er auf Seiten 19 - 36 in [Ga] zur Sprache kommt. Vorher hatte in Zürich noch niemand gewagt, mit Studierenden des Lehramtes der Sekundarstufe 1 dieses Thema so allgemein zu behandeln. Aber das Thema kam sehr gut an und schien den Studierenden sogar Spass zu machen.

Ein weiterer Hauptteil der Vorlesung bestand in einer axiomatischen Einführung in die Geometrie der Ebene. Die Zielsetzung war einfach zu fassen:

**Ziel.** (*Metrische Charakterisierung der Euklidische Ebene*). Es soll von einer Metrik  $d = d(\bullet, \bullet) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Menge  $E$  ausgegangen werden. (Davon wird später noch die Rede sein.) Durch einschränkende axiomatische Bedingungen an die Metrik  $d$  soll erreicht werden, dass das Paar  $(E, d)$  der Euklidischen Ebene mit ihrer Standard-Metrik  $\text{dist}(\bullet, \bullet) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  entspricht.

Die Axiome für die Metrik  $d$  bezogen sich naturgemäss auf Strecken, (setzten die schon eingeführte reelle Zahlengrade als gegeben voraus) und nahmen etwa folgende Gestalt an:

**Axiome.** Es seien  $P, Q, P', Q', P'', Q'' \dots \in E$  beliebig. Dann gelte:

(1) *Jede Strecke kann in eindeutiger Weise stetig durchlaufen werden:*

$$\forall t \in [0, d(P, Q)] : \exists_1 R \in [P, Q]^d : d(P, R) = t.$$

(2) *Die Vereinigung zweier Strecken, die mehr als einen Punkt gemeinsam haben, ist wieder eine Strecke:*

$$\#([P, Q]^d \cap [P', Q']^d) > 1 \Rightarrow \exists R, S \in E : [P, Q]^d \cup [P', Q']^d = [R, S]^d.$$

...

**Zusatzaufgaben.** Zeigen Sie:

(1) Die Französische Eisenbahn-Metrik  $d^{[O]}(\bullet, \bullet) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  genügt dem obigen Axiom (1), aber nicht dem obigen Axiom (2).

(2) Die New York-Taxi-Fahrer-Metrik  $d^{[sq]} : E^2(\bullet, \bullet) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  genügt keinem der beiden obigen Axiome (1) und (2).



- (3) Die Standard-Metrik  $\text{dist}(\bullet, \bullet) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  genügt den beiden Axiomen (1) und (2).

Wichtiges Zwischenziel im angestrebten Axiomatischen Aufbau der Metrischen Geometrie war der Beweis der folgenden Aussage:

**Hauptsatz.** (*Massstabs-Satz*) *Durch je zwei verschiedene Punkte gibt es genau einen "Massstab", das heisst genau eine Abstands-erhaltende Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $E$ , in deren Bild die beiden Punkte liegen:*

$$P, Q \in E \text{ mit } P \neq Q \Rightarrow \\ \exists_1 \varphi : \mathbb{R} \rightarrow E : \begin{cases} (1) \varphi(0) = P, & \varphi(d(P, Q)) = Q \\ (2) \forall s, t \in \mathbb{R} : d(\varphi(s), \varphi(t)) = |t - s|. \end{cases}$$

Nun war naheliegend, das man für den weiteren Aufbau der metrischen Geometrie in etwa nach dem folgenden Programm vorgehen konnte:

**Programm.** • Geraden definieren (als Bilder von Massstäben).

• Dimensionalität und Parallelität charakterisieren (Es gibt zwei Geraden  $g, h \subseteq E$ , die genau einen Punkt  $O$  gemeinsam haben und jeder Punkt  $P \in E \setminus \{O\}$  liegt auf einer Geraden  $l \subseteq E$ , welche  $g$  und  $h$  schneidet. Geraden, die sich nicht treffen, heissen parallel...)

• Halbgeraden definieren (als Bilder der Menge  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  unter Massstäben).

• Winkel definieren (zunächst als Isometrieklassen von Paaren von Halbgeraden mit gemeinsamem Ursprung...).

...

**Kommentar.** (A) Das oben skizzierte Programm war für das Lehrbuch [Ga] noch im Aufbau begriffen, als der Vortragende die schon genannte Geometrievorlesung übernahm. Der oben skizzierte Programm-Entwurf erschien ihm recht naheliegend und einleuchtend. Eines Tages teilte Peter Gabriel aber mit, er sei zur Einsicht gekommen, dass der vorgesehene programmatische Zugang zur metrischen Geometrie doch nicht für Studierende des Lehramts der Sekundarstufe 1 geeignet sei: Zuviel müsste da bei der detaillierten Umsetzung des Programms noch getan werden. In der Tat findet sich der oben skizzierte programmatische Zugang in modifizierter Form auf den Seiten 133 - 266 des Buches [Ga], (allerdings auch versehen auch mit zahlreichen historischen und persönlichen Kommentaren). So oder so: Umfang und Abstraktionsgrad des Programms entsprachen bei weitem nicht dem, was in etwa 7-8 Doppel-Lektionen mit einer Hörschaft zu bewältigen war, die mathematisch praktisch noch auf dem Stand der Matura (Abitur) war.

(B) Der Vortragende selbst machte die Erfahrung, dass sich bei den Lehramtstudierenden seiner Vorlesung keinerlei Bedürfnis zeigte, die Geometrie axiomatisch zu verstehen. Im Gegenteil: Warum sollte man sich das Leben mit allerlei abstrakten Gedankengängen schwer machen, um Dinge zu verstehen,

die ja ohnehin direkt einleuchteten. Die Bereitschaft zum formal-abstrakten Denken, die sich nach dem Schweizer Entwicklungs-Psychologen Jean Piaget ab dem 19. Altersjahr zeigen sollte (siehe [Pi]), war kaum zu orten. Was vom ganzen pädagogisch-didaktischen Abenteuer “Metrische Geometrie für Studierende des Lehramts drer Sekundarstufe 1” schliesslich übrig blieb war:

- Die Behandlung von *Metriken*, mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben.
- Die Formulierung des “*Massstabs-Satzes*” verbunden mit einigen Beispielen und Aufgaben, “um aufzuzeigen wie aus dem Alltag vertraute prämathematische Erfahrungstatsachen mit Hilfe der Mathematik (genauer: mit Hilfe des Begriffs der Menge und der Abbildung) modelliert werden.”

### “Wort-Metriken”

Das Interesse, auf welches die Metriken bei den Lehramtsstudenten der Sekundarstufe 1 stiess, ermutigten den Vortragenden zur Behandlung von Beispielen, die über die Euklidische Ebene Hinausgingen. Es galt also zunächst einmal Metriken auf beliebigen Mengen einzuführen, wobei wir die Bedingung (2) der in nachfolgenden Definition bereits nach dem in Aufgabe (2) Bewiesenen ausrichten:

**Definition.** Sei  $W \neq \emptyset$  eine Menge. Eine Abbildung  $d = d(\bullet, \bullet) : W \longrightarrow \mathbb{R}$  heisst eine *Metrik* auf  $W$ , wenn für alle  $P, Q, R \in W$  gilt:

- (1) (*Symmetrie*)  $d(P, Q) = d(Q, P)$ .
- (2) (*Definitheit*)  $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ .
- (3) (*Dreiecks-Ungleichung*)  $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ .

**Kommentar.** Im Hinblick auf ein schon ins Auge gefasstes Proseminar für Lehramtskandidaten der Sekundarstufe 2, in welchem es auch um Codierungstheorie gehen sollte, wollten wir die speziellen Metriken “didaktisch austesten”, die wir hier als “Wort-Metriken” bezeichnen. Es handelt sich um *mehrfache Produktmetriken* der *trivialen Metrik*. Die nachfolgenden Zusatzaufgaben sind diesen Konzepten gewidmet.

**Zusatzaufgaben.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $W, W_1, \dots, W_n$  nicht leere Mengen, versehen mit Metriken  $d : W \longrightarrow \mathbb{R}, d_1 : W_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \dots, d_n : W_n \longrightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

- (4)  $P, Q \in W \Rightarrow d(P, Q) \geq 0$  (vgl. Aufgabe (2)).
- (5) Durch

$$d(P, Q) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } P = Q, \\ 1, & \text{wenn } P \neq Q \end{cases},$$

wird auf  $W$  eine Metrik definiert, die sogenannte *triviale Metrik*.

(6) Durch die Vorschrift

$$((P_1, \dots, P_n), (Q_1, \dots, Q_n)) \mapsto d((P_1, \dots, P_n), (Q_1, \dots, Q_n)) := \sum_{i=1}^n d_i(P_i, Q_i)$$

wird auf dem cartesischen Produkt  $\prod_{i=1}^n W_i$  der Mengen  $W_1, \dots, W_n$  eine Metrik

$$d(\bullet, \bullet) = d = \sum_{i=1}^n d_i : \prod_{i=1}^n W_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert, die *Produkt-Metrik* der Metriken  $d_i$ .

**Aufgabe und Beispiel.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathfrak{A} \neq \emptyset$  eine Menge und sei  $\mathfrak{W} := \mathfrak{A} \times \dots \times \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^n$ . Zeigen Sie:

(7) Durch  $((w_1, \dots, w_n), (v_1, \dots, v_n)) \mapsto \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid w_i \neq v_i\}$  wird auf  $\mathfrak{W}$  eine Metrik

$$d_{[W]} = d_{[W]}(\bullet, \bullet) : \mathfrak{W} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert, die wir die *Wort-Metrik* auf  $\mathfrak{W} := \mathfrak{A} \times \dots \times \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^n$  nennen wollen. Die Menge  $\mathfrak{A}$  nennen wir dann das *Alphabet* und die Elemente  $W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathfrak{W}$  nennen wir *Wörter* der Länge  $n$  (oder *n-Wörter*) über dem Alphabet  $\mathfrak{A}$ . (Hinweis: Es mag sich lohnen, die Aufgabe in einen allgemeineren Zusammenhang einzubetten, und zuerst Zusatzaufgaben (5) und (6) zu lösen).

**Aufgaben.** (Es gelten die Bezeichnungen von Aufgabe und Beispiel (7).)

- (8) Sei  $r \in \mathbb{N}_0$ , und sei  $Z = (z_1, \dots, z_r) \in \mathfrak{W}$ . Definieren Sie den "*Kreis*"  $\mathcal{C}_r^d(Z)$  und die "*offene Kreisscheibe*"  $\mathcal{U}_r^d(Z)$  vom Radius  $r$  und mit Zentren  $Z$  bezüglich der Wort-Metrik  $d = d_{[W]}$ .
- (9) Sei  $r \in \mathbb{N}_0$ , sei  $Z = (z_1, \dots, z_r) \in \mathfrak{W}$  und sei  $\#\mathfrak{A} = m \in \mathbb{N}$ . Geben Sie Formeln an für  $\#\mathcal{C}_r^d(Z)$  und  $\#\mathcal{U}_r^d(Z)$ .
- (10) Seien  $P = (p_1, \dots, p_n), Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathfrak{W}$ . Definieren Sie die "*Strecke*"  $[P, Q]^d$  zwischen  $P$  und  $Q$  bezüglich der Metrik  $d = d_{[W]}$ . Nehmen Sie an, es sei  $\#\mathfrak{A} = m \in \mathbb{N}$  und geben Sie eine Formel an für  $\#[P, Q]^d$ .

# Auf der Pirsch nach $\pi$ – Versuch einer Annäherung

## Einbeschriebene reguläre $2^n$ -Ecke

**Zielsetzung und Vorbemerkung.** (A) (*Erste Annäherung mit Hilfe von regulären  $2^n$ -Ecken*) Wir interessieren uns für die "Länge des Umfangs eines Kreises" – oder kürzer gesagt für den "Kreisumfang" im Verhältnis zum "Kreisdurchmesser", also für die *Kreiszahl*  $\pi$ . Doch wie sollen wir den Kreisumfang denn überhaupt definieren, wenn uns nur der Längenbegriff von Strecken zur Verfügung steht, d.h. die Standard-Distanz zwischen zwei Punkten?

Wir folgen dem klassischen Gedanken, den Kreis durch einbeschriebene (reguläre) Vielecke zu ersetzen, deren Ecken-Zahl wir immer grösser werden lassen. Den Umfang jedes einzelnen Vielecks können wir dann grundsätzlich verstehen, denn er ist ja die Summe der Längen aller Seiten dieses Vielecks, also eine endliche Summe von Streckenlängen. Doch ist auch die Berechnung der Seitenlängen eines regulären Vielecks nicht ohne Tücke, vor allem dann, wenn man sich in den Kopf gesetzt hat, keine Trigonometrie zu verwenden, sondern nur den Satz des Pythagoras.

Wir wählen aus diesem Grund nicht beliebige reguläre Vielecke für unsere Überlegungen, sondern reguläre  $2^n$ -Ecke. Wir interessieren uns dann für den Quotienten  $\pi_n$  aus dem Umfang des dem Kreis einbeschriebenen regulären  $2^n$ -Ecks und dem Durchmesser dieses Kreises. In diesem Fall können wir eine Rekursions-Formel angeben, welche  $\pi_{n+1}$  durch  $\pi_n$  ausdrückt.

(B) (*Der Grenzwert-Begriff drängt sich auf*) Mit Hilfe unserer Rekursionsformel lassen sich dann mit einem einfachen Rechner schon die ersten Werte von  $\pi_n$  (näherungsweise) berechnen und so im Experiment feststellen, dass diese Zahlen sich "von unten her dem Wert 3.1415 nähern". Es entspricht auch unserer intuitiven geometrischen Erwartung, dass die Zahlen  $\pi_n$  sich von unten her mehr und mehr dem Verhältnis zwischen dem Umfang und dem Durchmesser des Kreises nähern.

Doch, lassen wir das Rechen-Experiment und die intuitive Anschauung beiseite, so müssen wir uns im Sinne der streng mathematischen Denkweise fragen, ob denn tatsächlich eine Zahl  $\pi$  existiert, der sich die Zahlen  $\pi_n$  immer mehr nähern, also derart, dass  $|\pi_n - \pi|$  beliebig klein wird, wenn nur  $n$  hinreichend gross ist. Mit anderen Worten geht es um die Frage, ob die Folge der Zahlen  $\pi_n$  tatsächlich einen Grenzwert hat. In einer Abfolge von "geführten" Aufgaben lassen wir die Leserschaft diesen Beweis erbringen.

Vorerst "ad hoc" werden wir dann die gesuchte Kreiszahl  $\pi$  als den Grenzwert der Folge  $\pi_n$  verstehen und lassen damit zwei wichtige Fragen noch offen. Die

erste Frage ist für die näherungsweise Berechnung des Grenzwerts  $\pi$  von besonderer Bedeutung. Sie lautet: können wir die Abweichungen  $|\pi_n - \pi|$  zuverlässig und gut abschätzen? Die zweite Frage ist grundsätzlicher Art und lautet: Sind wir denn überhaupt berechtigt, die gesuchte Kreiszahl  $\pi$  – das Verhältnis von Kreisumfang zum Kreisdurchmesser – mit dem Grenzwert der Zahlenfolge  $\pi_n$  zu identifizieren? Auf beide Fragen werden wir erst später zurückkommen.

**Bezeichnungen und Bemerkungen.** (A) Sind  $P, Q \in E$ , so stehe  $[P, Q]$  für die Strecke  $[P, Q]^{\text{dist}}$  zwischen  $P$  und  $Q$  bezüglich der Standard-Metrik  $\text{dist} : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , also für die "übliche Strecke" zwischen  $P$  und  $Q$ .

(B) Sei  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ , sei  $Z \in E$ , sei  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_r(Z)$  und sei  $d := 2r$  der Durchmesser von  $\mathcal{C}$ .

(C) Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Ein *dem Kreis  $\mathcal{C}$  eingeschriebenes reguläres  $m$ -Eck* – oder kurz ein *reguläres  $m$ -Eck auf  $\mathcal{C}$*  – ist gegeben durch eine Folge  $P_\bullet := (P_1, \dots, P_m) \in \mathcal{C}^m$  so, dass mit  $P_{m+1} := P_1$  gilt:

$$\begin{aligned} s_{P_\bullet} &:= \min\{\text{dist}(P_i, P_j) \mid i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ mit } i \neq j\} = \\ &= \text{dist}(P_i, P_{i+1}) \text{ für } i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen dann jeweils  $P_i$  und  $P_{i+1}$  als *aufeinanderfolgende Ecken* unseres regulären  $m$ -Ecks auf  $\mathcal{C}$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Immer noch im Banne unserer vorhin geübten axiomatischen Betrachtungsweise wollen wir ohne Beweis folgendes festhalten: Ist  $Q_\bullet = (Q_1, \dots, Q_m)$  ein zweites reguläres  $m$ -Eck auf  $\mathcal{C}$ , so sind  $P_\bullet$  und  $Q_\bullet$  kongruent. Genauer: Es gibt eine Isometrie (oder Kongruenz-Abbildung)  $\varphi : E \rightarrow E$  (eindeutig, falls  $m > 2$ ), derart dass  $Q_i = \varphi(P_i)$  für  $i = 1, \dots, P_i$ .

Als unmittelbare Konsequenz erhält man, dass dann

$$\begin{aligned} s_{P_\bullet} &:= \min\{\text{dist}(P_i, P_j) \mid i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ mit } i \neq j\} = \\ &= \min\{\text{dist}(Q_i, Q_j) \mid i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ mit } i \neq j\} =: s_{Q_\bullet}. \end{aligned}$$

Wir können also definieren

$$s_m := s_{P_\bullet}.$$

und bezeichnen  $s_m$  als *Seitenlänge* des regulären  $m$ -Ecks auf  $\mathcal{C}$ .

(D) Ist  $m \in \mathbb{N}$ , so stehe  $c_m$  für den Umfang eines dem Kreis  $\mathcal{C}$  eingeschriebenen regulären  $m$ -Ecks, sodass wir schreiben können:

$$c_m = m s_m.$$

(E) Wir wollen nun die Quotienten aus dem Umfang  $c_{2^n}$  eines dem Kreis  $\mathcal{C}$  eingeschriebenen regulären  $2^n$ -Ecks und dem Durchmesser  $d$  dieses Kreises  $\mathcal{C}$  untersuchen, also die Zahlen

$$\pi_n := \frac{c_{2^n}}{d}, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Satz.** *In den obigen Bezeichnungen gilt:*

- (a)  $\pi_1 = 2$ .
- (b) *Für alle  $n \in \mathbb{N}$  besteht die rekursive Relation:*

$$\pi_{n+1} = 2^n \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}}.$$

*Beweis:* (a): Ist  $n = 1$ , so sind wir im ausgearteten Fall eines  $2^1 = 2$ -Ecks, das aus zwei gegenüberliegenden Punkten  $P, Q \in \mathcal{C}$  besteht, so dass  $Z \in [P, Q]$ . Dann ist die Behauptung klar (vgl. Figure 2.2 aus [Br1]).

(b): Ist  $n \in \mathbb{N}$ , so schreiben wir  $f_n$  für die Seitenlänge  $s_{2^n}$  des regulären  $2^n$ -Ecks auf  $\mathcal{C}$ . Es gilt also:

$$f_n = s_{2^n} = \frac{c_{2^n}}{2^n} \quad \text{und} \quad f_{n+1} = s_{2^{n+1}} = \frac{c_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}.$$

Wir gehen nun vom regulären  $2^n$ -Eck zum regulären  $2^{n+1}$ -Eck über, indem wir auf jedem Bogen auf  $\mathcal{C}$ , welcher zwei aufeinanderfolgende Ecken  $P$  und  $P'$  verbindet einen Punkt  $Q$  einführen, der von  $P$  und  $P'$  gleich weit entfernt ist. Anschaulich gesagt:  $Q$  ist der Mittelpunkt des genannten verbindenden Bogens. Wir haben also die folgende Situation:

$$f_{n+1} = \text{dist}(P, Q) = \text{dist}(Q, P') \quad \text{und} \quad \text{dist}(Q, Z) = r.$$

Nun bezeichne  $Q'$  den Schnittpunkt der Strecken  $[Z, Q]$  und  $[P, P']$ . Dann gilt  $\text{dist}(P, Q') = \frac{f_n}{2}$  und mit  $h := \text{dist}(Z, Q')$  folgt nach Pythagoras (vgl. Figure 2.3 aus [Br1]):

$$h := \sqrt{r^2 - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2},$$

denn weil sich die Strecken  $[Z, Q]$  und  $[P, P']$  im Punkt  $Q'$  rechtwinklig schneiden, hat das Dreieck  $ZQ'P'$  in  $Q'$  einen rechten Winkel. Wegen  $\text{dist}(Q, Q') = r - h$  (und weil sich die Strecken  $[Z, Q]$  und  $[P, P']$  im Punkt  $Q'$  rechtwinklig schneiden), erhalten wir nach Pythagoras für die Länge  $f_{n+1}$  der Hypotenuse

des in  $Q'$  rechtwinkligen Dreiecks  $P'Q'Q$ :

$$\begin{aligned}
 f_{n+1} &= \sqrt{\left(\frac{f_n}{2}\right)^2 + (r-h)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{f_n}{2}\right)^2 + r^2 - 2rh + h^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{f_n}{2}\right)^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2} + r^2 - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2}} = \\
 &= \sqrt{2r^2 - 2r^2\sqrt{1 - \left(\frac{f_n}{2r}\right)^2}} = \\
 &= \sqrt{2}r\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{f_n}{2r}\right)^2}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}d\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{f_n}{d}\right)^2}}.
 \end{aligned}$$

Weil aber

$$\pi_{n+1} = \frac{c_{2^{n+1}}}{d} = \frac{2^{n+1}f_{n+1}}{d} \quad \text{und} \quad f_n = \frac{c_{2^n}}{2^n} = \frac{\pi_n d}{2^n}$$

folgt nun

$$\begin{aligned}
 \pi_{n+1} &= \frac{2^{n+1}f_{n+1}}{d} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{f_n}{d}\right)^2}} = \\
 &= \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n d}{2^n d}\right)^2}} = \\
 &= 2^n\sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}},
 \end{aligned}$$

wie behauptet.

**Kommentare (A)** (*Berechnung der Zahlen  $\pi_n$* ) Natürlich kann man nun mit dem obigen Satz mit einem einfachen Rechner rekursiv die Werte der Zahlen  $\pi_n$  ausrechnen, etwa für  $n = 1, 2, \dots, 8$ , eine Übung, die wohl des Klassenzimmers nicht unwürdig ist:

$n$	Näherungswert für $\pi_n$	Eckenzahl	Name des Vielecks
1	2.000000...	2	Doppelstrecke
2	2.828427...	4	Quadrat
3	3.061467...	8	Octagon
4	3.121445...	16	Hexadecagon
5	3.136554...	32	
6	3.140337...	64	
7	3.141346...	128	
8	3.141583...	256	

(B) (*Eine Programmierungs-Aufgabe*) Unter Verwendung der Rekursionsformeln aus unserem Satz ein Programm zur Berechnung der Zahlen  $\pi_n$  zu schreiben, könnte eine durchaus Klassenzimmer-geeignete Aufgabe sein.

(C) (*Auftauchen des Grenzwert-Begriffs*) Wir haben bei der Herleitung der obigen Rekursionsformeln nur den Satz von Pythagoras verwendet und eine gewisse handwerkliche Geschicklichkeit im Umgang mit Wurzelthermen. Damit lässt sich dieser Satz schon schon auf dem Niveau der Sekundarstufe 1, also im Untergymnasium beweisen. Auf dieser Stufe steht allerdings der Grenzwert-Begriff noch nicht zur Verfügung, von dem wir uns intuitiv leiten liessen bei unserer ersten Pirsch nach der Zahl  $\pi$ . Doch könnte sich gerade hier die Möglichkeit bieten, im Unterricht auf diesen Begriff einzugehen. Fassen wir zunächst zusammen:

Wir liessen uns von der Idee leiten, dass "die Zahlen  $\pi_n = \frac{c_{2^n}}{d}$  mit wachsendem  $n$  den Quotienten  $\pi = \frac{c}{d}$  aus dem Kreisumfang und dem Kreisdurchmesser immer besser annähern." Allerdings ist dieser Gedanke auch zirkelschlüssig: Wir wissen ja nicht, wie wir den Umfang des Kreises, also die Länge einer "gekrümmten Linie" überhaupt verstehen sollen. Vielmehr hoffen wir, dass sich die Umfänge  $c_{2^n}$  der regulären  $2^n$ -Ecke auf  $\mathcal{C}$  "mit wachsendem  $n$  immer mehr einem Wert  $c$  nähern" und diesen Wert  $c$  verstehen wir dann als den Umfang unseres Kreises. Entsprechend müssten sich dann die Zahlen  $\pi_n$  bei wachsendem  $n$  immer mehr dem festen Wert  $\pi = \frac{c}{d}$  nähern. Tatsächlich lässt die Tabelle aus Teil (A) vermuten, dass sich "die Zahlen  $\pi_n$  von unten her immer mehr einem festen Wert nähern".

Warum es also nicht wagen – soweit wie möglich mit Hilfe aus der Klasse – genau zu formulieren, was wir vermuten: Nämlich, dass es eine Zahl  $\pi$  derart gibt, dass folgendes gilt:

@ Gibt man sich eine beliebige positive Zahl  $\varepsilon$  vor, so gibt es eine Zahl  $n(\varepsilon)$  derart, dass für jede positive ganze Zahl  $n > n(\varepsilon)$  gilt  $|\pi_n - \pi| < \varepsilon$ .

Warum dann nicht nachschieben, dass die Mathematiker in dieser Situation sagen, die "Folge der Zahlen  $\pi_n$  strebe (oder konvergiere) gegen  $\pi$ " oder " $\pi$  sei der Grenzwert der Folge der Zahlen  $\pi_n$  wenn  $n$  gegen  $\infty$  gehe" und diesen



Tatbestand in der einprägsamen Form

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = \pi$$

niederschreiben. Natürlich gehört dazu auch – besonderes in unserer "Lateinlos" gewordenen Zeit – die Erklärung des Wortes *Limes*, das da aufgetaucht ist. Ruhig darf man dann auch zugeben, dass "uns im Moment die Methoden noch fehlen um zu beweisen, dass eine solche Zahl  $\pi$  auch wirklich existiert." Existiert eine solche Zahl  $\pi$  – also hat die Folge der Zahlen  $\pi_n$  einen Grenzwert – so sagt man auch, die Folge  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei "*konvergent*".

Erwartungsgemäss werden wohl die meisten Schüler nicht wirklich verstehen, was da alles gesagt wurde. Für einige wenige in der Klasse mag es aber bewirken, dass "sie der Mathematik wegen Dauer-Unterforderung im Unterricht" nicht verloren gehen.

Ich bin jedenfalls meinem vormaligen Mathematiklehrer Dr. Conzelmann immer noch dankbar, dass er regelmässig riskierte, eine halbe Lektion "her zu geben" um solch "Horizont-erweiternde mathematische Vorgriffe" zu machen. Das mag auch der Grund dafür sein, warum aus seinen Klassen immer viele Mathematiker hervorgegangen sind. Dabei galt er durchaus nicht als Lehrer, "der sich nur an die Besten seines Faches" wandte.

Mir scheint, dass die "Elitophobie" die sich – mindestens in der Schweiz – an vielen Schulen breitgemacht hat, der Mathematik ein Nachwuchs-Problem beschert. Deshalb halte ich es für wichtig, dass im Mathematik-Unterricht doch ab und zu etwas einfließt, das sich primär an die Interessiertesten und Begabtesten wendet. Im Schulfach Sport schreckt man ja auch nicht vor einer solchen "Eliteförderung" zurück.

(D) (*Zur Konvergenz der Folge  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$* ) Natürlich mag es sein, dass man bereits über den Grenzwertbegriff für Zahlenfolgen verfügt und dass bekannt ist, dass eine monoton wachsende beschränkte Folge konvergent ist. Dann lässt sich mit elementaren geometrischen Argumenten die Konvergenz der Folge  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beweisen und damit die Existenz der Zahl  $\pi$  in unserem "vorläufigen Sinn." Die nachfolgenden Übungsaufgaben sind diesem Thema gewidmet. Wir verlassen dabei die axiomatische Kleinlichkeit im Umgang mit der Geometrie und lassen den schulstufengemässen geometrischen Alltags-Verstand walten.

**Aufgaben.** Es gelten die obigen Bezeichnungen. Wie bereits angekündigt, soll nun der Beweis erbracht werden, dass die Folge der Zahlen  $\pi_n$  tatsächlich konvergiert. Bitte skizzieren Sie ausgiebig! Sie werden dann sehen, dass sich die Aufgabe durchaus in der Schule behandeln lässt.

- (11) Zeigen Sie unter Verwendung der Rekursionsformel aus dem vorangehenden Satz, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\pi_n < \pi_{n+1}$ . (Hinweis: Wenn es harzt, können Sie sich vom Beweis der Aussage (c) aus Proposition 3.2 in [Br1] inspirieren lassen.)
- (12) Sei  $t$  eine Tangente an den Kreis  $\mathcal{C}$ . Seien  $P, Q \in \mathcal{C}$  mit  $P \neq Q$ , sei  $g$  die Gerade durch  $Z$  und  $P$  und sei  $h$  die Gerade durch  $Z$  und

$Q$ . Wir nehmen an,  $g$  schneide  $t$  im Punkt  $P'$  und  $h$  schneide  $t$  im Punkt  $Q'$ . Zeigen Sie, dass  $\text{dist}(P, Q) < \text{dist}(P', Q')$ . (Hinweis: O.E.:  $\text{dist}(Z, P') \leq \text{dist}(Z, Q')$ . Sei  $Q'' \in [Z, Q']$  mit  $\text{dist}(Z, Q'') = \text{dist}(Z, P')$ . Zeigen Sie – etwa durch Einführen der Geraden  $l$  durch  $Z$  und den Mittelpunkt von  $[P, Q]$  – dass das Dreieck  $P'Q'Q''$  in  $Q''$  einen stumpfen Winkel hat. Schliessen Sie daraus, dass  $\text{dist}(P', Q'') < \text{dist}(P', Q')$ . Beachten Sie, dass  $r = \text{dist}(Z, P) \leq \text{dist}(Z, P')$  und dass die Gerade durch  $P$  und  $Q$  zur Geraden durch  $P'$  und  $Q''$  parallel ist. Wenden Sie den Strahlensatz an.)

- (13) Sei  $n > 1$  und sei  $P_\bullet = (P_1, \dots, P_{2^n})$  ein reguläres  $2^n$ -Eck auf  $\mathcal{C}$ . Sei  $t_i$  die Tangente an  $\mathcal{C}$  im Punkt  $P_{1+(i-1)2^{n-2}}$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Mit  $t_5 := t_1$  sei  $T_i$  der Schnittpunkt der Tangenten  $t_i$  und  $t_{i+1}$ . Wir setzen  $T_5 := T_1$ . Zeigen Sie (für  $i = 1, 2, 3, 4$ ):
- Auf der Strecke  $[Z, T_i]$  liegt eine Ecke  $P_{j_i}$  unseres  $2^n$ -Ecks.
  - $\text{dist}(T_i, T_{i+1}) = d$ .
  - Verwenden Sie Aufgabe (12) um zu zeigen, dass  $c_{2^n} < 4d$ .
  - Schliessen sie, dass  $\pi_n < 4$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (14) Verwenden Sie Teil (D) des obigen Kommentars, sowie die Aufgaben (12) und (13)(d) um zu zeigen, dass die Folge  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert und dass gilt  $\pi := \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n \leq 4$ .

**Historische Anmerkung.** Wir werden später noch hören, dass die Annäherung an die Kreiszahl  $\pi$  durch regelmässige Vielecke bis ins 17. Jahrhundert eine grosse Rolle spielte. Dem Französischen Mathematiker François Viète gelang es durch Annäherung der Kreisfläche durch die Fläche einbeschriebener regulären  $2^n$ -Ecken, ein unendliches Produkt anzugeben, in welches die Zahl  $\pi$  in einfacher Weise verpackt ist, nämlich:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdots = \frac{2}{\pi}.$$

Es handelt sich um "die erste Darstellung von  $\pi$  als unendliches Produkt".

## Geschichte einer Annäherung: $\pi$ abschätzen

**Vorbemerkung.** (A) Im Moment begnügen wir uns mit unserer (gemäss Aufgabe (14) mindestens nicht verbotenen) "Privat-Definition" der Zahl  $\pi$  als Grenzwert der oben eingefürten Zahlenfolge  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Über eine genauere Abschätzung der Abweichungen  $|\pi_n - \pi|$  verfügen wir derzeit nicht. Was wir auf Grund der obigen Tabelle und Aufgabe (14) aber immerhin schon einmal mit Sicherheit sagen können, ist dass  $3.1415 < \pi \leq 4$ .

Wir wissen natürlich schon von unserer eigenen frühen Schulzeit her, dass der Wert 3.14 die Zahl  $\pi$  recht gut annähert. Vielleicht hatten wir sogar das Glück, das man uns dort – etwa durch Abwickeln einer Schnur von einer Büchse oder dem Abrollen eines Rades – diese Annäherung auch experimentell bestätigt

hat.

(B) Nun scheint uns aber, dass der Moment gekommen ist, wo wir doch einen ganz knappen Rückblick auf die *Geschichte der Berechnung der Zahl  $\pi$*  werfen sollten. Dieses riesige Kapitel der Mathematik und der Mathematik-Geschichte, können wir hier natürlich nicht einmal ansatzweise im Überblick vorstellen. Wir hoffen aber, dass wir mit unseren wenigen Hinweisen eine gewisse Neugier und Motivation zu weiteren selbstständigen Recherchen Ihrerseits wecken und verweisen besonders auch auf die “Kleine  $\pi$ -Bliographie”, die am Schluss dieses Skriptes zu finden ist.

**Historischer Abriss.** (A) (*Annäherung durch reguläre Vielecke*) Der eben genannte Näherungswert 3.14 ist in der Tat schon lange bekannt, und ist erstmals von Archimedes von Syrakus um das Jahr 250 v. Chr. berechnet worden – mit Hilfe des Umfangs von regulären Vielecken. Bis ins 17. Jahrhundert sind praktisch alle Näherungswerte für  $\pi$  mit dieser Methode berechnet worden. In diesem Sinne bewegen wir uns mit unserer eigenen Vorgehensweise auf klassisch-historischem Boden. Die folgende Tabelle soll einen vereinfachten historischen Abriss zur näherungsweise Berechnung von  $\pi$  mit Hilfe von regulären Vielecken geben, wobei mit ”Stellen“ die Anzahl der korrekt berechneten Dezimalstellen nach dem Komma gemeint ist:

Name, Jahr	Verwendetes Vieleck	Stellen
Archimedes, 250 v. Chr.	$96 = 3 \times 2^5$ – Eck	2
Lin Hui, 270	$3072 = 3 \times 2^{10}$ – Eck	5
Dschamschid Mas’ud al-Kaschi, 1424	$3 \times 2^{28}$ – Eck	15
Ludolph van Ceulen, 1610	$2^{62}$ – Eck	35

Wenn bedenkt, dass damals noch keine Rechner zur Verfügung standen, kann man die mit der Bestimmung der oben genannten Näherungswerte erbrachte Leistung nur bewundern. Das war schon den Zeitgenossen bewusst. Die Zahl  $\pi$  wurde deshalb zu Ehren ihres ersten ”Computisten“ lange Zeit die *Archimedische (Kreis-)Konstante* genannt. Im 17. Jahrhundert erhielt die Zahl  $\pi$  auf Grund ihres damaligen ”Computisten“ den Ehren-Namen *Ludolph’sche Zahl*. Die Bezeichnung  $\pi$  wurde erst im 18. Jahrhundert allgemein üblich, vor allem unter dem Einfluss Leonhard Eulers. Sie steht für den ersten Buchstaben des griechischen Wortes ”περιφερεια“ (Periphereaia) oder ”περιμετροσ“ (Perimetros).

(B) (*Die Analysis tritt auf den Plan*) Mit dem Entstehen der Infinitesimalrechnung in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts trat die Untersuchung der Zahl  $\pi$  in eine neue Phase ein, die man als die ”analytische Phase“ bezeichnen könnte. Nun kam es zu zahlreichen neuen Grenzwert-Darstellungen von  $\pi$  etwa mit Hilfe unendlicher Reihen oder unendlicher Produkte. Die älteste Reihendarstellung der Zahl  $\pi$  ist vermutlich die im Jahre 1628 von Gottfried

Wilhelm Leibnitz angegebene Formel

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = (\arctan(1)).$$

Die hier auftretende Reihe ist allerdings nicht absolut konvergent und strebt deshalb nur "langsam gegen ihren Grenzwert". Für Näherungsberechnungen von  $\pi$  ist die Formel von Leibniz also nicht sonderlich geeignet.

Die durch Leibniz angeregte Verwendung der analytischen Darstellung zyklometrischer Funktionen wurde etwas später von John Machin aufgegriffen, der im Jahre 1706 die folgende Beziehung bewies:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Da die Reihe

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

für  $x = \frac{1}{5}$  und  $x = \frac{1}{239}$  relativ "rasch konvergiert" ist Machins Formel zur Näherungsweise Berechnung von  $\pi$  gut geeignet. Mit Hilfe seiner Formel gelang es Machin, die Zahl  $\pi$  bis auf 100 Dezimalstellen nach dem Komma zu berechnen. Damit hatte – knapp 100 Jahre nach dem "Rekord" Ludolph van Ceulens – die Analysis klar Oberhand gewonnen vor der Approximation durch reguläre Vielecke.

Eine weitere und allgemein bekannte Reihendarstellung, in welcher die Zahl  $\pi$  "einfach verpackt" erscheint, wurde 1748 von Leonhard Euler angegeben:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \zeta(2),$$

wobei  $\zeta$  für die erst ein Jahrhundert später in der heutigen Allgemeinheit definierten *Riemann'sche Zeta-Funktion* steht. Die Berechnung der obigen Reihensumme hat Euler während Jahren als des sogenannte "*Basler-Problem*" beschäftigt, dessen Lösung ihm dann mit Hilfe der Funktion  $x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$  gelang, also mit Hilfe der "*reellen Zeta-Funktion*". Euler hat auch unendliche Produktformeln angegeben, in welchen die Zahl  $\pi$  "einfach verpackt" erscheint. Es gelang ihm auch, unter Verwendung solcher Produktdarstellungen, die Zahl  $\pi$  bis auf 146 Dezimalstelle nach dem Komma zu berechnen.

Die Beiträge der Analysis zum Verständnis der Zahl  $\pi$  sind natürlich eher von theoretischem Interesse und liefern Näherungsverfahren zur Berechnung dieser Zahl eher als "Nebenprodukte". In sinnbildhafter Weise wollen wir zum Schluss noch die bekannte *Eulersche Identität*  $e^{i\pi} + 1 = 0$  nennen, welche oft als die "schönste Gleichung" bezeichnet wird, weil sie in beeindruckend eleganter Weise die vier fundamentalen Zahlen 0, 1 und  $\pi$  und  $e$  verbindet.

(C) (*Die Computer stürzen sich auf  $\pi$* ) Auch in der eben erwähnten "analytischen Epoche" war die konkrete Berechnung noch primär rudimentäres Handwerk, zum Teil schon unterstützt durch mechanischen Rechenmaschinen oder

Rechenschieber. Doch mit dem Aufkommen *elektronischer Rechenmaschinen* und ihren Nachfolgern – den *Computern*– eröffneten sich den  $\pi$ -Computisten neue Dimensionen.

So gelang es G.W. Reitweiser im Jahre 1949 mit Hilfe eines ENIAC-Rechners die Zahl  $\pi$  bis auf tausend Dezimalstellen nach dem Komma zu berechnen, womit alle vorangehenden “Rekorde” beträchtlich überboten waren. Entsprechend der Entwicklung immer leistungsfähigerer Computer gelang im Jahre 1972 die Berechnung von  $\pi$  bis auf  $10^6$  Stellen und im Jahre 1989 sogar bis auf  $10^9$  Stellen. Im Herbst 2016 lag der “Rekord” bei  $22.4 \times 10^{12}$  Stellen, aber man darf damit rechnen, dass auch diese Leistung bald wieder “verzweigt” sein wird. Natürlich sind diese  $\pi$ -Rekorde nur noch indirekt von praktischem Nutzen: Sie sind sozusagen Testläufe für neue Computer oder neue numerische und stochastische Berechnungsmethoden. Schon mit der Ludolphschen Näherung aus dem Jahre 1610 wird nämlich allen denkbaren praktischen Anwendungen bei weitem Genüge getan, selbst in hochgenauen gebieten wie der Astronomie.

(D) ( *$\pi$  als Hirn-Sport-Gerät und “Social Event”*) Doch nicht nur vom Menschen geschaffene Ersatz-Hirne beteiligen sich an der Rekord-Stellenjagd auf  $\pi$ . Auch menschliche Hirne selbst machen da mit. Es geht dabei darum, dass man möglichst viele Stellen von  $\pi$  aus dem Gedächtnis wiedergibt. Derzeit soll der Weltrekord bei 70'030 Stellen liegen, erbracht im Jahre 2016 vom Inder Suresh Kumar Sharma in 17 Stunden Rezitier-Arbeit. Doch nicht alle Sportler sind Spitzensportler – und so ist es auch bei den  $\pi$ -Stellenjägern: Es bestehen auch in Deutschland nach Alterskategorien gegliederte  $\pi$ -Vereine, in denen um Rekorte von 25 bis einige hundert Stellen gekämpft wird.

In der gleichen Richtung zielt auch der  $\pi$ -Tag, der am 14. März 2015 (nomen est omen: 3.1415) in den USA zum erstenmal statt fand. Mittlerweile hat dieser jeweils am 14. März begangene Tag in allen Kontinenten Fuss gefasst. Eine Frage für Lehrer und Schüler ist wohl auch, ob an diesem Tag schulfrei sein sollte oder nicht. Schöner als schulfrei wäre es natürlich, in den Schulen zur Feier des Tages etwas  $\pi$ -bezogenes zu unternehmen. Dass es davon mehr als genug gibt, soll auch dieser Kurs aufzeigen.

**Aufgaben.** Archimedes und Lin Hui haben für Ihre Berechnungen jeweils reguläre  $3 \cdot 2^n$ -Ecke verwende, mit  $n = 5$  respektive  $n = 10$ . Wir wollen es ihnen gleichtun. Sei also  $\pi'_n := \frac{c_{3 \cdot 2^n}}{d}$ , wo  $d$  wieder der Durchmesser unseres Kreises  $\mathcal{C}$  und  $c_{3 \cdot 2^n}$  der Umfang unseres regulären  $3 \cdot 2^n$ -Ecks auf  $\mathcal{C}$  ist ( $n \in \mathbb{N}_0$ ).

- (15) Berechnen Sie  $\pi'_0$ .
- (16) Geben Sie eine Rekursionsformel an, in der  $\pi'_{n+1}$  durch  $\pi'_n$  ausgedrückt wird. (Hinweis: Sie können weitgehende dem Beweis der Rekursionsformeln für die Zahlen  $\pi_n$  folgen).
- (17) Verwenden Sie die Rekursionsformel aus Aufgabe (16) um die Zahlen  $\pi'_n$  zu berchnen für  $n = 1, 2, \dots, 10$ .

**Aufgaben.** Ebenfalls von Bedeutung für die näherungsweise Berechnung der Zahl  $\pi$  sind *Integraldarstellungen*, in welchen diese Zahl "einfach verpackt" erscheint. Als elementare Beispiele dazu seien folgende Aufgaben gestellt:

- (18) (a)  $\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ; (b)  $\pi = 2 \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ .  
 (19)  $\frac{\pi^2}{6} = \int_0^1 \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$ . (Hinweis: Drücken sie den Integranden durch eine Potenzreihe aus. Beachten Sie die Eulersche Summenformel für den links stehenden Quotienten – die Euler'sche Lösung des "Basler Problems.")

Im Hinblick auf das Nachfolgende stellen wir bereits jetzt die nächsten beiden Aufgaben.

**Aufgaben.** Als Wert für  $\pi$  sei 3.1415 genommen.

- (20) Geben Sie unter allen Brüchen mit Nenner  $\leq 10$  denjenigen an, der am nächsten bei  $\pi$  liegt.  
 (21) Geben sie unter allen Ausdrücken der Form  $\sqrt{\frac{m}{n}}$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $n \leq 25$  denjenigen an, der am nächsten bei  $\pi$  liegt.

**Anwendungen.** (A) (*Annäherung durch Brüche und Wurzeln*) Seit der Antike wurde versucht, die Zahl  $\pi$  mit Bruch- und Wurzeltermen genau darzustellen. Doch was man so fand, waren immer nur Näherungswerte, die zum Teil allerdings erstaunlich genau waren.

Im Jahre 1761 machte Johann Heinrich Lambert die Hoffnung auf eine genaue Bruchsdarstellung zunichte, indem er bewies, dass  $\pi$  eine irrationale Zahl ist. Im Jahre 1882 bewies Ferdinand von Lindemann, dass  $\pi$  transzendent ist. Damit war insbesondere auch die Hoffnung zerschlagen,  $\pi$  mit Hilfe von (beliebig verschachtelten) Wurzeltermen und Brüchen genau anzugeben.

Andrerseits wurden im 19. Jahrhundert erstaunlich gute Näherungsdarstellungen für  $\pi$  durch Wurzeln und Brüche gefunden, etwa der von C.G. Specht im Jahre 1828 vorgeschlagene Wurzel-Term:

$$\frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{439}{278}},$$

der erst in der 9-ten Dezimalstelle nach dem Komma vom richtigen Wert abweicht. Wir werden später diese Näherung nochmals erwähnen.

Für *praktische Anwendungen* – etwa in Bereich des Handwerks, der Architektur und der Kunst – waren auch schon in der Antike mehrere Näherungswerte für  $\pi$  in Gebrauch, die meist in Form von Brüchen angegeben wurden. Hier war natürlich nicht nur die kleine Abweichung vom wahren Wert wichtig, sondern besonders auch die Einfachheit. Der schon genannten Näherungswert 3.14 entspricht dieser Forderung recht gut, mindestens dort, wo Handwerker, Architekten und Künstler mit Dezimal-Zahlen rechnen können. Im Altertum war aber die Wiedergabe in Bruchform üblich, wobei es für die praktische Anwenbarkeit im Alltag wichtig war, dass die Nenner nicht zu gross waren. Der

bereits von Archimedes ermittelte Näherungswert

$$3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} = \frac{1 + (3 \times 7)}{7} = 3.1428\dots$$

kam eine besonders grosse praktische Bedeutung zu: Er liegt recht nahe beim wahren Wert von  $\pi$  und ist doch relativ einfach. Die auffallende Beziehung zur Zahlen-Symbolik durch das Auftreten der Zahlen 1, 3 und 7 verlieh diesem Näherungswert noch zusätzliche Beachtung, welche über den reinen Anwendungs-Pragmatismus hinausging.

(B) (*Annäherung von  $\pi$  durch die Zahl 3*) In Ägyptischen und Babylonischen Schriften taucht öfter auch der Wert 3 für die Zahl  $\pi$  auf. Auch eine Bibelstelle aus dem Alten Testament kann so gelesen werden. Natürlich war den Ägyptern, Babyloniern und Israeliten sicher bekannt, dass 3 nicht der wahre Wert von  $\pi$  sein könne. Man denke nur an das hoch entwickelte Handwerk und die grossartige Baukunst in diesen Völkern. Da muss es doch unvermeidlich gewesen sein, einmal einen Kreisumfang relativ mit dem Durchmesser zu vergleichen, etwa beim Anbringen von Ornamenten an einer Säule.

Viel ist deshalb spekuliert worden über die Aussage, der Wert von  $\pi$  sei 3. Wurde diese Angabe als "Grob-Annäherung" für "Nicht-Eingeweihte" gemacht, bei der "Eingeweihte" aber sofort wussten, wie die Aussage einzustufen war? Oder standen eher philosophische Gründe dahinter, wie etwa die besondere symbolische Bedeutung der Zahl 3, die man (in ungefährender Weise) im Kreis wieder fand.

Oder ging es gar um Geheimhaltung? In andern Schriften der Ägypter und Babylonier findet man auch genauere Werte von  $\pi$  als die Zahl 3. Wurden diese aber aus Gründen der zivilisatorisch-militärischen Vorherrschaft in gewissen öffentlich zugänglichen Schriften geheim gehalten?

(C) (*Ein Blick in die Thora*) Wenden wir uns jetzt wegen der Frage " $\pi = 3$ ?" der Bibel zu! Im ersten Buch der Könige, Kapitel 7, Verse 23-26 (also im Alten Testament der Bibel – oder der hebräischen Thora) wird das "Meer" beschrieben: Ein grosses bronzenes Gefäss, das im Tempel zu Jerusalem stand. Es wurde auf Geheiss von König Salomo durch den Kupferschmid Hiram von Tyrus angefertigt, der für die Ausstattung des Tempels verantwortlich war (siehe 1 Könige 7, 13 - 22). In Vers 23 lesen wir:

*"Dann machte er das "Meer". Es wurde aus Bronze gegossen und mass zehn Ellen von einem Rand zum andern; es war völlig rund und fünf Ellen hoch. Eine Schnur von dreissig Ellen konnte es rings umspannen."*

Um uns eine Vorstellung von den Ausmassen dieses Gefässes zu machen, lassen wir uns darinnen, dass eine "(Königs)-Elle" oder ein "Cubitus" 52.2 cm mass. Zu bemerken ist auch, dass die Massangaben über den Tempel und die Kultgegenstände in "Königs-Ellen" gemacht wurden, und nicht in den etwas kleineren "Volks-Ellen". Vers 24 führt dann weiter aus:

*"Unterhalb seines Randes waren rundum Rankengebilde. In einer Länge von*

*dreissig Ellen umsäumten sie das Meer ringsum in zwei Reihen. Sie wurden beim Guss mitgegossen.*”

Um die Grossartigkeit dieses von Menschenhand geschaffenen Meeres etwas zu illustrieren, sei auch Vers 25 angeführt, obwohl er uns nicht im Zusammenhang mit der Frage “ $\pi = 3?$ ” zu stehen scheint.

*“Das Meer stand auf zwölf Rindern. Von ihnen schauten drei nach Norden, drei nach Westen, drei nach Süden und drei nach Osten. Das Meer ruhte oben auf den Rindern. Ihre Hinterteile waren nach innen gekehrt.”*

Schliesslich wollen wir noch Vers 26 anführen, der wieder in Bezug steht zu unserer Frage:

*“Die Wand des Meeres war eine Handbreit dick. Sein Rand war wie der Rand eines Bechers geformt, einer Lilienblüte gleich. Es fasste zweitausend Bat.”*

Aus dem obigen Vers 23 könnte man also zunächst in der Tat schliessen, die Bibel gäbe als Wert für  $\pi$  die Zahl drei an. Ein philologisch gesinnter Exegete könnte das leicht erklären: Tyrus stand zur damaligen Zeit unter Phönizischer Herrschaft. Man darf davon ausgehen, dass Hiram sein Handwerk von den Phöniziern erlernte hatte und damit wohl auch den Gebrauch der offiziellen Phönizisch-Babylonischen Approximation  $\pi = 3$ , – mindestens im Umgang mit Menschen, die nicht zum Phönizischen Herrschaftsbereich gehörten. Es ist nicht auszuschliessen, dass die Thora in den Aussagen über das “Meer” die Angaben seines Herstellers Hiram von Tyrus übernahm, denn er war ja der eigentliche Experte in dieser Sache.

(D) (*Interreligiöses Frühstück in Hanoi*) Dem Vortragenden mochte eine solch philologisch-exegetische Erklärung zur Frage “ $\pi = 3?$ ” nicht genügen. Da er Mathematiker ist, machen ihn nämlich philologische Erklärungen zur Bibel misstrauisch, ganz besonders, wenn es um Dinge wie die Zahl  $\pi$  geht. Als fundamentalistisch eingestuft Katholik ist es ihm auch wichtig, die Dinge so für wahr zu nehmen, wie sie in der Heiligen Schrift stehen. Er machte sich also auf Grund von Vers 24 und 26 seine eigenen Gedanken zur Frage “ $\pi = 3?$ ”. Da sich unsere Bibelstelle im Alten Testament befindet, und der Vortragende nicht des Hebräischen mächtig ist, schien es ihm wünschenswert diese Frage mit jemandem zu erörtern der zwei Bedingungen erfüllte: Mathematiker und Orthodoxer Jude zu sein.

Im Dezember 2013 konkretisierte sich dieser Wunsch: Anlässlich einer Tagung in Hanoi konnte ich beim Frühstück mit meinem Amerikanischen Kollegen Gennady Lyubeznik ein Gespräch zur obigen Frage führen. Gennady ist ein international hoch angesehener Mathematiker und orthodoxer Jude – wie er sich selbst mir gegenüber ausgedrückt hat. Damit kennt er die Hebräische Thora sehr gut. Ich fragte ihn also um seine Meinung zum Umfang/Durchmesser-Problem des bronzenen Meeres, also zur biblisch motivierten Frage “ $\pi = 3?$ ” Seine Antwort war: *Das Meer war in Grundriss überall gleichmässig rund, wobei in der Mathematik dem Wort rund das Wort gekrümmt entspricht. Der Grundriss war also mathematisch gesprochen von einer glatten Kurve umrandet. Damit könnte er eine Ellipse mit grösstem Durchmesser 10 Ellen*



gewesen sein. *Der kleinste Durchmesser der Ellipse war so gewählt, dass der Umfang der Ellipse 30 Ellen betrug.*“ Gennady bezog sich natürlich auf den Hebräischen Text, in welchem den Ausdrücken “rund” und “gekrümmt” vielleicht auch eine etwas andere Bedeutung zukommt als in der deutschen Übersetzung.

Natürlich konnte ich es nicht lassen, jetzt auch meine eigenen Gedanken zum Thema zum Besten zu geben: In Vers 26 lesen wir: “Sein Rand war wie der Rand eines Bechers geformt, einer Lilienblüte gleich.“ Das Meer hatte also Kelchform, und damit eine Art “Taille“, und nahm seinen grössten Durchmesser am oberen Rand an. Zur Bestimmung des Umfangs wurde das Meer wohl natürlicherweise mit einer Schnur um die Taille umspannt, währendem zur Bestimmung des Durchmessers eine Schnur quer über den oberen Rand gespannt wurde. So wäre es möglich, dass die Länge der um die Taille gelegten Schnur den im Vergleich zum Durchmesser zu kleinen – Wert von 30 Ellen annahm. Auch die beiden in Vers 24 genannten Zier-Ranken, werden das Meer vermutlich im Bereich der Taille umwunden haben, hätten dann ungefähr die Länge von 30 Ellen gehabt.

Damit war das Thema allerdings noch nicht ganz abgehandelt. Gennady erzählte nämlich, auf dem Campus einer Universität im Mittleren Westen der USA befinde sich in Stein gemeisselt der Satz: *“Der Umfang eines Kreises ist das Dreifache seines Durchmessers.*“ Sofort tauchte da die Idee auf, dass das für einen grossen Kreis ja auch gelten könne, wenn man seinen Durchmesser auf der Erdoberfläche messe. Die daran anschliessende Frage konnten wir aber nicht mehr als Anregung zu einem weiteren mathematischen Gedankengang nehmen, nämlich die Frage: “Was aber, wenn die Verfasser der in Stein gemeisselten Inschrift behaupten, die Erde sei flach?“ Doch bleiben wir auf der Erde, von der wir alle anzunehmen gelernt haben, dass ihre Oberfläche recht gut durch eine Sphäre approximiert werden kann, und machen wir uns mit dieser Zuversicht an die nachfolgende Aufgabe.

**Aufgaben.** Wir modellieren die Erdoberfläche durch eine Sphäre  $\mathcal{S}$  mit einem Umfang von  $C \approx 40'000$  Km – wobei wir für unser Problem den Umfang  $C$  auch allgemein wählen können.

Wir nehmen also an, unser Kreis  $\mathcal{C}$  mit dem Umfang  $c$  liege auf einer Späre  $\mathcal{S}$  vom Umfang  $C > c$ . Sei  $\tilde{d}$  der *sphärische Durchmesser* von  $\mathcal{C}$  auf  $\mathcal{S}$ . Also ist  $\tilde{d}$  die Länge des kürzesten Bogens auf der Sphäre  $\mathcal{S}$  der zwei Punkte verbindet, die sich auf dem Kreis  $\mathcal{C}$  gegenüber liegen. Die oben formulierte Idee des “Kreises auf der Erde, dessen Umfang das Dreifache seines (spärischer) Durchmessers ist“, lässt sich nun so formulieren:

- (22) Man wähle das Verhältnis  $\gamma := \frac{c}{C}$  so, dass gilt  $\frac{c}{d} = 3$ . Dazu gehe man wie folgt vor:
- (a) Man drücke

$$\tilde{\pi}(\gamma) = \tilde{\pi}\left(\frac{c}{C}\right) := \frac{c}{\tilde{d}} = \frac{\pi d}{\tilde{d}} = \pi \frac{d}{\tilde{d}}$$

durch das Verhältnis  $\gamma$  aus. Unser Ziel ist es,  $\gamma$  so zu wählen, dass  $\tilde{\pi}(\gamma) = 3$ .

(b) Man setze

$$\gamma := \cos(\beta), \text{ mit } 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

und zeige, dass

$$\frac{\pi}{\tilde{\pi}(\gamma)} = \frac{\tilde{d}}{d} = \frac{\pi - 2\beta}{2\cos(\beta)}.$$

(c) Man bestimme  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  so, dass  $\frac{\pi - 2\beta}{2\cos(\beta)} = 3$  und berechne daraus den Quotienten  $\gamma$ . (Hinweis: Weil rechts vom Gleichheitszeichen gerade die Zahl 3 steht, lässt sich dies im Allgemeinen transzendente Gleichung  $\frac{\pi - 2\beta}{2\cos(\beta)} = \text{const.}$  genau lösen, z.B. durch "Er-raten".)

(23) Man nehme schliesslich an, dass der Kreis  $\mathcal{C}$  auf der "nördlichen Hemisphäre liegt" und sein Zentrum auf der "Erdachse" hat – also ein "nördlicher Breitenkreis" ist.

(a) Man bestimme die entsprechende "geographische Breite".

(b) Man berechne die Länge des längsten und des kürzesten Tages im Jahr (also die Zeit vom Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang) auf dem Kreis  $\mathcal{C}$ , unter der vereinfachenden Annahme, dass der nördliche Wendekreis bei  $\frac{45^\circ}{2}$  liegt.

(24) Man bestimme  $\gamma$  und  $\tilde{\pi}(\gamma)$  wenn  $\mathcal{C}$  der Passau passierende Breitenkreis ist.

## Umbeschriebene reguläre $2^n$ -Ecke

**Bemerkung und Bezeichnungen.** (A) In den Aufgaben (11) - (14) haben wir bereits gezeigt, dass die Folge der Zahlen  $\pi_n$  konvergiert, und wir haben die Kreiszahl  $\pi$  mit dem Grenzwert dieser Folge identifiziert. Was noch aussteht, ist eine zuverlässige und gute Abschätzung der Abweichungen  $|\pi_n - \pi|$  der Zahlen  $\pi_n$  vom Grenzwert  $\pi$ . Dies soll nun nachgeholt werden. Wir verwenden dazu den Kreis  $\mathcal{C}$  umbeschriebene reguläre  $2^n$ -Ecke und lassen uns von der heuristischen Idee leiten, den Umfang unseres Kreises gleichzeitig durch die Umfänge seiner einbeschriebenen und seiner umbeschriebenen regulären  $2^n$ -Ecke abzuschätzen. Dies wird es uns wiederum erlauben, eine Abschätzung der gesuchten Art mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und der Strahlensätze zu gewinnen.

(B) Für jede Zahl  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  betrachten wir ein "kleinstes reguläres  $2^n$ -Eck, welches den Kreis  $\mathcal{C}$  enthält" – also, ein reguläres  $2^n$ -Eck, dessen Seiten den Kreis  $\mathcal{C}$  in ihrem Mittelpunkt berühren. Wir gehen dazu aus von einem unserem dem Kreis  $\mathcal{C}$  eingeschriebenen regulären  $2^n$ -Eck  $P_\bullet = (P_1, \dots, P_{2^n}) \in \mathcal{C}^{2^n}$ , wobei wir wiederum schreiben  $P_{2^{n+1}} := P_1$ .  $Q_i$  sei jeweils der Mittelpunkt der

Strecke  $[P_i, P_{i+1}]$  und  $\overline{Q}_i$  sei jeweils der Schnittpunkt der Halbgeraden mit Ursprung  $Z$  durch  $P_i$ . Nun sei  $t_i$  die Gerade durch  $\overline{Q}_i$ , die senkrecht steht auf der Strecke  $[Z, \overline{Q}_i]$  – also die Tangente an  $\mathcal{C}$  im Punkt  $\overline{Q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^n + 1$ ). Sei  $\overline{P}_i$  der Schnittpunkt der beiden Tangenten  $t_i$  und  $t_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^n$ ) (die wegen  $n \geq 2$  nicht parallel sind) oder, gleichbedeutend: der Schnittpunkt der Geraden durch  $Z$  und  $P_i$  mit der Geraden  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^n$ ). Die Punkte  $\overline{P}_i$   $i = 1, 2, \dots, 2^n$ , bilden dann die Ecken eines dem Kreis  $\mathcal{C}$  umschriebenen regulären  $2^n$ -Ecks  $\overline{P}_\bullet = (\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_{2^n})$ , und wenn wir schreiben  $\overline{P}_{2^n+1} := \overline{P}_1$ , so sind die Strecken  $[\overline{P}_i, \overline{P}_{i+1}]$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^n$ ) die Seiten dieses  $2^n$ -Ecks.

(C) Wir behalten die obigen Bezeichnungen bei und schreiben

$$\overline{c}_{2^n} := \sum_{k=1}^{2^n} \text{dist}(\overline{P}_k, \overline{P}_{k+1}) = 2^n \text{dist}(\overline{P}_i, \overline{P}_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, 2^n)$$

für den Umfang unseres dem Kreis  $\mathcal{C}$  umschriebenen regulären  $2^n$ -Ecks  $\overline{P}_\bullet$ . Dann setzen wir:

$$\overline{\pi}_n := \frac{\overline{c}_{2^n}}{d} \quad \left( = \frac{2^n}{d} \text{dist}(\overline{P}_i, \overline{P}_{i+1}), i = 1, 2, \dots, 2^n \right).$$

Sofort sieht man dass

$$\overline{\pi}_2 = \frac{\overline{c}_2}{d} = \frac{4d}{d} = 4.$$

**Satz.** *in den obigen Bezeichnungen gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Für alle  $n \geq 2$  besteht die Gleichheit:*

$$\overline{\pi}_n = \pi_n \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}}.$$

(b) *Für alle  $n \geq 2$  gilt  $\pi_n < \overline{\pi}_n$ .*

(c) *Für alle  $n \geq 1$  gilt  $\pi_n < \pi_{n+1}$ .*

(d) *Für alle  $n \geq 2$  gilt  $\overline{\pi}_n > \overline{\pi}_{n+1}$ .*

(e) *Für alle  $n > 3$  gilt  $\overline{\pi}_n - \pi_n < \frac{1}{2^{2n-8}\sqrt{15}}$ .*

*Beweis:* (a): Für alle  $n \geq 1$  (respektive  $\geq 2$ ) sei (wieder)

$$f_n = \frac{\pi_n}{2^n} d \text{ respektive } \overline{f}_n = \frac{\overline{\pi}_n}{2^n} d$$

die Seitenlänge eines dem Kreis  $\mathcal{C}$  einbeschriebenen respektive umschriebenen regulären  $2^n$ -Ecks. Wir fixieren  $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$  und setzen  $P := P_i, \overline{P} := \overline{P}_i, Q := Q_i$  und  $\overline{Q} := \overline{Q}_i$ . Die Strecken  $[Z, Q]$  und  $[Z, \overline{Q}]$  haben nun die Längen (vgl. Figure 3.2 aus [Br1]),

$$\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi_n d}{2^n \cdot 2}\right)^2} = \frac{d}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2} \text{ respektive } \frac{d}{2},$$

wobei für die erste der Längen “Pythagoras hilft” (wie Dr. Conzelmann gesagt hätte). Aus Gründen der Ähnlichkeit folgt

$$\bar{f}_n : f_n = \frac{d}{2} : \frac{d}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2} = 1 : \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}, \text{ also}$$

$$\bar{\pi}_n : \pi_n = \frac{\bar{\pi}_n d}{2^n} : \frac{\pi_n d}{2^n} = \bar{f}_n : f_n = 1 : \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2},$$

sodass tatsächlich

$$\bar{\pi}_n = \pi_n \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}}.$$

(b): Dies folgt unmittelbar aus (a) weil die Beziehung  $\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2} < 1$  besteht.

(c): Dies wurde schon in Aufgabe (11) gezeigt.

(d): Der Beweis sei als Aufgabe gesellt. Wenn Sie Hilfe anfordern wollen, können Sie dies bei den beiden Beweisen der Aussage (d) von Proposition 3.2 in [Br1] tun.

(e): Sei  $n > 3$ . Gemäss Aussage (a) gilt

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_n - \pi_n &= \pi_n \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}} - \pi_n = \pi_n \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}} - 1 \right) = \\ &= \pi_n \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Nach (b) und (d) und der am Schluss von Teil (C) der einführenden “Bemerkung und Bezeichnungen” gemachten Feststellung können wir zunächst sagen, dass:

$$\pi_n < \bar{\pi}_n \leq \bar{\pi}_2 = 4 = 2^2.$$

Es folgt

$$\left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2 < \left(\frac{2^2}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^{n-2}}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n-4}}.$$

Weil  $\frac{1}{2^{2n-4}} \leq \frac{1}{16}$  erhalten wir

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2} > \sqrt{1 - \frac{1}{2^{2n-4}}} \geq \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

wegen  $0 < 1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2 < 1$  folgt aber auch

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2} > 1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2 > 1 - \frac{1}{2^{2n-4}},$$

und somit

$$1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2} < 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{2n-4}}\right) = \frac{1}{2^{2n-4}}.$$

Insgesamt erhalten wir deshalb in der Tat:

$$\bar{\pi}_n - \pi_n = \pi_n \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi_n}{2^n}\right)^2}} < 2^2 \frac{1}{2^{2n-4}} = \frac{1}{2^{2n-8}\sqrt{15}}.$$

**Korollar.** Die zwei Folgen

$$(\pi_n)_{n \geq 1} \text{ und } (\bar{\pi}_n)_{n \geq 2}$$

konvergieren beide gegen  $\pi$ , wobei für alle  $n > 3$  gilt:

$$\pi_n < \pi < \bar{\pi}_n < \pi_n + \frac{1}{2^{2n-8}\sqrt{15}}.$$

**Aufgabe.** Um zu demonstrieren, dass wir damit eine gute Abschätzung der Differenzen  $|\pi_n - \pi|$  gefunden haben, schlagen wir folgendes vor:

- (25) Zeigen Sie: Ist  $n \geq 62$  so gilt  $|\pi_n - \pi| < 10^{-35}$  und diskutieren Sie diese Tatsache im Hinblick auf den durch Ludolph van Ceulen errechneten Näherungswert für  $\pi$ .
- (26) Bestimmen Sie nur mit Hilfe der im obigen Korollar gegebenen Ungleichungen eine möglichst kleine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  so dass  $|\pi_n - \pi| < 10^{-13}$ .

## Die Rektifizierbarkeit des Kreises

**Vorbemerkungen.** (A) (*Die Frage der Rechtfertigung.*) Wir haben bis jetzt  $\pi$  als Grenzwert der Folge der Zahlen  $\pi_n$  für  $n \rightarrow \infty$  definiert. Die Zahlen  $\pi_n$  haben wir gewonnen mit Hilfe von regulären  $2^n$ -Ecken auf dem Kreis  $\mathcal{C}$ . Damit war damit auch die Aussage verbunden, dass “der Umfang des Kreises mit dem Durchmesser  $d$  die Länge  $\pi \cdot d$  hat”, wo  $\pi$  die von uns definierte Zahl ist. Doch sind wir zu dieser Definition denn überhaupt berechtigt? Wir hätten ja etwa auch von der Idee ausgehen können, den Kreis durch von reguläre  $3^n$ -Ecken anzunähern, oder mit regulären  $5^n$ -Ecken, oder gar durch irgendwelche regulären Vielecke mit immer grösserer Eckenzahl. Wären wir dann aber jedesmal auf einen Grenzwert gestossen? Und wenn – wären diese Grenzwerte alle gleich der von uns definierte Zahl  $\pi$ ? Wenn dem nicht so wäre, hätten wir auch die Rechtfertigung zu unserer Definition nicht.

Bei genauerer Betrachtung müsste man aber wohl nicht nur reguläre Vielecke auf  $\mathcal{C}$  betrachten, sondern auch “irreguläre” – genauer Folgen von irregulären Vielecken “die den Kreis immer besser annähern. Mit dem, was wir bisher an Geometrie benutzt haben, würde uns die Beantwortung dieser Fragen nicht enden wollende technische Probleme bescheren...

(B) (*Trigonometrischen Funktionen als Rettungs-Anker*) Nehmen wir aber die Trigonometrie zu Hilfe, so ist die obige Rechtfertigungsfrage tatsächlich beantwortbar. Wir setzen dazu die *Sinus-* und *Cosinus-Funktion* voraus und zwar so, wie sie uns von der *Analysis* zur Verfügung gestellt werden. Wir verwenden dann auch die *analytische Definition* von  $\pi$  als die kleinste positive

Nullstelle der Sinus-Funktion, wobei wir diese “analytisch definierte Kreiszahl” vorerst zur Unterscheidung mit  $\hat{\pi}$  bezeichnen werden. Dann führen wir die *trigonometrische Standard-Parameterdarstellung des Kreises* ein und zeigen mit diesser, dass der Kreis im Sinne der Analysis *rektifizierbar* ist. Ein wenig genauer gesagt, streben wir an, folgendes zu zeigen:

Ist

$$(P_{\bullet})^{[k]} = (P_1^{[k]}, \dots, P_{n^{[k]}}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$$

eine Folge von beliebigen (also auch irregulären) Vielecken auf dem Kreis  $\mathcal{C}$  (mit dem Durchmesser  $d$ ), die ”diesem Kreis für wachsendes  $k$  beliebig nahe kommen“, so konvergiert die Folge der Umfänge

$$c_{P_{\bullet}^{[k]}} := \sum_{i=1}^{n^k} \text{dist}(P_i^{[k]}, P_{i+1}^{[k]})$$

für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\hat{\pi} \cdot d$ .

Ein offensichtliches Nebenprodukt dieses Ergebnisses wird dann sein, dass die analytisch definierte Kreiszahl  $\hat{\pi}$  mit ”unserer“ Kreiszahl  $\pi$  übereinstimmt.

(C) (*Die Analysis des Kreises*) Wir werden im Folgenden den analytischen Zugang zu den Winkelfunktionen – und damit zum Kreis – kurz repetieren. Es handelt sich dabei um ein Thema, dass in die Vorlesung Analysis I oder II gehört, leider dort aber oft etwas ”stiefmütterlich“ behandelt wird. Es scheint uns aber doch wichtig, dass Mathematiklehrpersonen an Gymnasien soweit ”Kreis-Spezialisten“ sind, dass sie auch diesen analytischen Aspekt des Kreises etwas verinnerlicht haben. Natürlich können wir hier die ”analytische Theorie des Kreises“ nicht aufbauen. Wir beschränken uns daher auf einige Hinweise, welche uns wichtig erscheinen, und welche Sie vielleicht ermutigen, über den Kreis wieder einmal in ”universitärer Abstraktion und Strenge“ nachzudenken.

**Repetition.** (A) (*Die Sinus- und die Cosinus-Funktion*) Wir setzen die Existenz von zwei Funktionen

$$\sin(\bullet), \cos(\bullet) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

voraus, welche den folgenden Bedingungen genügen:

(1) (*Additionstheorem des Sinus*) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x).$$

(2) (*Additionstheorem des Cosinus*) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

(3) (*Stetigkeit*) Die Funktionen  $\sin(\bullet), \cos(\bullet) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  sind stetig an der Stelle 0.

(4) (*Grenzwert-Bedingung für den Sinus*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

(B) (*Anwendungen der Additionstheoreme*) Alleine aus den Additionstheoremen (1) und (2) lassen sich nun sehr viele Beziehungen finden, von denen wir einige (ohne Beweis) angeben. Wir beschränken uns hier natürlich auf eine Auswahl von Dingen, die sich für unsere späteren Überlegungen als nützlich erweisen werden:

$$(5) \sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1.$$

(6) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(a) \sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

$$(b) \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

$$(c) \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(x)).$$

(7) Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(\cos(x) - \cos(y))^2 + (\sin(x) - \sin(y))^2 = 4\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Wenn Sie nicht widerstehen können, für die eine oder andere dieser Aussagen einen Beweis zu führen, sind sie auf bestem Weg als Mathematiklehrperson. Zudem sind ja diese Beweise, die nur auf findigen Term-Umformungen beruhen auch eine reizvolle Herausforderung für das Klassenzimmer.

(C) (*Ableitungen*) Mit Hilfe der in Teil (A) geforderten Stetigkeits- repektive Grenzwert-Bedingungen (3) und (4) und mit (6)(b) lässt sich nun leicht zeigen:

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Unter Verwendung von (8) und der Additionstheoreme erhält man nun folgendes:

(9) Die Sinus- und die Cosinus-Funktion sind differenzierbar sind, und für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Insbesondere sieht man auch, dass die Sinus- und die Cosinus-Funktion beide *glatt* sind, also beliebig oft differenzierbar. Was im Teil (B) zum Thema "Beweise" gesagt wurde, gilt natürlich auch hier.

(D) (*Existenz und Eindeutigkeit*) Man zeigt nun, etwa mit Hilfe der beiden für alle  $x$  absolut konvergen Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{respektive} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

dass ein Paar von Funktionen  $(\sin(\bullet), \cos(\bullet))$  existiert, das den obigen vier Bedingungen (1) - (4) genügt. Dabei bedarf lediglich die Verifikation der beiden Additionstheoreme eines gewissen Aufwandes an Reihen-Umformungen.

Ist umgekehrt ein Paar von Funktionen  $(\sin(\bullet), \cos(\bullet))$  gegeben, das den obigen vier Bedingungen (1) - (4) genügt, so folgt mit den resultierenden Aussagen (5) und (9), dass die Taylor-Reihen der beiden Funktionen um 0 gerade die beiden obigen Potenzreihen sind. Dies zeigt, dass die Bedingungen (1) - (4)

das fragliche Funktionenpaar auch eindeutig festlegen.

(E) (*Die analytische Definition der Zahl  $\pi$ .*) In der Analysis wird die Zahl  $\pi$  normalerweise eingeführt als die kleinste positive Nullstelle der Sinus-Funktion, wobei primär deren Existenz bewiesen werden muss. Wir wollen die Existenz dieser besonderen Nullstelle hier vorerst ohne Beweis übernehmen und bezeichnen sie mit  $\hat{\pi}$ , um sie von unserem definierten Grenzwert  $\pi$  unterscheiden zu können. Natürlich lassen wir es nicht auf uns sitzen, die Existenz dieser fundamentalen Zahl einfach so ohne Beweis zu übernehmen. Wir werden vielmehr in einer Abfolge von Aufgaben diese Existenz beweisen (siehe Aufgaben (27)-(29)). Die Zahl  $\hat{\pi}$  ist also charakterisiert durch die Bedingung:

$$\sin(\hat{\pi}) = 0 \text{ und } \sin(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in ]0, \hat{\pi}[.$$

Wieder aus den Additionstheoremen erhält man nun für alle  $x \in \mathbb{R}$  die folgenden Aussagen:

- (10)  $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x = n\hat{\pi}$
- (11)  $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x = \frac{\hat{\pi}}{2} + n\hat{\pi}$ .
- (12)  $\sin(x + \hat{\pi}) = -\sin(x), \quad \cos(x + \hat{\pi}) = -\cos(x)$ .
- (13)  $\sin(x + 2\hat{\pi}) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\hat{\pi}) = \cos(x)$ .
- (14)  $\sin(x + \frac{\hat{\pi}}{2}) = \cos(x), \quad \sin(x) = \cos(x - \frac{\hat{\pi}}{2})$ .

Nun folgt wegen der aus (9), (10) und (11) resultierenden Monotonie-Eigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktion:

- (15) Ist  $0 \leq x < y \leq 2\hat{\pi}$ , so gelten folgende Aussagen
  - (a)  $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x + y = 2\hat{\pi}$ .
  - (b)  $\sin(x) = -\sin(y) \Leftrightarrow x + y = 2\hat{\pi}$ .

(F) (*Parametrisierung des Kreises*) Der Einfachheit halber wollen wir ab jetzt annehmen, dass Zentrum  $Z$  unseres Kreises  $\mathcal{C}$  sei der Punkt  $(0, 0)$ , sodass also gilt

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = r\}.$$

Nun betrachten wir die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t \mapsto \varphi(t) := (r\cos(t), r\sin(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}).$$

Mit Hilfe von (6)(b) und (13) folgt natürlich sofort, dass  $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi([0, 2\hat{\pi}[) \subseteq \mathcal{C}$ . Mit Hilfe von (5), (6)(b), (10), (11) und (13) folgt  $\cos(0) = -\cos(\hat{\pi}) = \cos(2\hat{\pi}) = 1$ . Weiter ist nach (5) auch klar, dass  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Über den Zwischenwertsatz folgt nun mit (15)(a) dass die Cosinus-Funktion im Intervall  $[0, 2\hat{\pi}[$  jeden Wert  $a \in ]-1, 1[$  genau an zwei Stellen  $x, y$  ( $0 \leq x < y = 2\hat{\pi} - x$ ) annimmt, sodass dann nach (5) und (15)(b) gilt  $|\sin(x)| = \sqrt{1 - a^2}$  ( $\neq 0$ ) und  $\sin(y) = -\sin(x)$ . Die Werte  $-1$  und  $1$  nimmt die Cosinus-Funktion im Intervall nur an den Stellen  $\hat{\pi}$  und  $1$  an, und dort verschindet die Sinus-Funktion. Daraus folgt leicht:

- (16) Für jeden Punkt  $P \in \mathcal{C}$  gibt es genau eine Zahl  $t \in [0, 2\hat{\pi}[$  derart, dass  $\varphi(t) = P$ .



Man nennt die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die *trigonometrische Standard-Parameterdarstellung des Kreises*.

**Aufgaben.** Es soll schrittweise gezeigt werden, dass die Sinus-Funktion eine kleinste positive Nullstelle hat.

- (27) Zeigen Sie, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:
- (Doppelwinkelformel für den Sinus)  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ .
  - $\sin(x) \neq 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ .
- (28) Nehmen Sie an, es sei  $\sin(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  und zeigen Sie, dass daraus folgen würde:
- $\cos(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ . (Hinweis: Aufgabe (27)(a) beachten.)
  - $\cos(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ . (Hinweis: Aussage (B)(5) aus der "Repetition" beachten und den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen anwenden.)
  - Die Sinus-Funktion wächst auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  streng monoton und es gilt  $\sin(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ . (Hinweis: (Aussagen (C)(9) und (B)(5) aus der "Repetition" beachten.)
  - Für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt  $\cos(x) > \frac{1}{2}$ . (Hinweis: Aufgabe (28)(c) und Aufgabe (27)(a) beachten.)
  - Für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$  gilt  $\sin(x) > 1$ . (Hinweis: Aufgabe (28)(d), Aussagen (C)(9) und (B)(5) aus der "Repetition" beachten. Den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Sinus-Funktion anwenden.)
- (29) Sei  $\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}_{>0} \mid \sin(x) = 0\}$  und  $\hat{\pi} := \inf(\mathbb{S})$  (mit der üblichen Konvention, dass  $\inf(\emptyset) = \infty$ ). Zeigen Sie:
- $\mathbb{S} \neq \emptyset$ . (Hinweis: Aufgabe (28) und Aussage (B)(6)(b) aus der Repetition beachten.)
  - $\hat{\pi} \in \mathbb{S}$ . (Hinweis: Stetigkeit der Sinus-Funktion beachten.)

**Definition und Bemerkung (A) (Partitionen)** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Unter einer *n-Partition (des Intervalles)*  $[0, 2\hat{\pi}[$  verstehen wir eine Aufsteigende Zahlenfolge in diesem Intervall, also, eine Folge

$$t_{\bullet} := (t_i)_{i=1}^n \in [0, 2\hat{\pi}[^{n+1} \text{ mit } 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < 2\hat{\pi}.$$

Ist eine solche *n-Partition* gegeben, so schreiben wir immer

$$t_{n+1} := 2\hat{\pi} + t_1, \text{ sodass also gilt } \varphi(t_{n+1}) = \varphi(t_1).$$

Den *Feinheitgrad* der *n-Partition*  $t_{\bullet}$  definieren wir durch

$$t(t_{\bullet}) := \max\{t_{i+1} - t_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}.$$

(B) (*Vielecke auf dem Kreis*) Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $t_{\bullet} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  eine *n-Partition* von  $[0, 2\hat{\pi}[$ . Wir schreiben

$$P_i := \varphi(t_i), \text{ sodass } P_i \in \mathcal{C} \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1), \text{ mit } P_{i+1} = P_i.$$

Wir nennen die Folge

$$\varphi(t_{\bullet}) = P_{\bullet} = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathcal{C}^n \text{ das durch } t_{\bullet} \text{ auf } \mathcal{C} \text{ definierte Vieleck .}$$

Die Strecke  $[P_i, P_{i+1}]$  nennen wir die  $i$ -te Seite des Vielecks  $P_\bullet$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Nach Voraussetzung ist  $0 < t_{i+1} - t_i < 2\hat{\pi}$ , also  $0 < \frac{t_{i+1} - t_i}{2} < \hat{\pi}$ . Weil die Sinusfunktion auf dem Intervall  $]0, \hat{\pi}[$  positiv ist, folgt  $\sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) > 0$ . Mit Hilfe der Gleichheit (7) aus Teil (B) der vorangehenden Repetition erhalten wir deshalb für die Länge der  $i$ -ten Seite  $[P_i, P_{i+1}]$  unseres Vielecks

$$\text{dist}(P_i, P_{i+1}) = \text{dist}(\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})) = 2r \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Der *Umfang* des Vielecks  $P_\bullet$  ist deshalb gegeben durch

$$c_{P_\bullet} := \sum_{i=1}^n \text{dist}(P_i, P_{i+1}) = 2r \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right).$$

**Satz.** Zu jeder Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Zahl  $\delta > 0$  so, dass für den Umfang  $c_{P_\bullet}$  des durch die  $n$ -Partition  $t_\bullet$  auf  $\mathcal{C}$  definierte Vieleck  $P_\bullet = \varphi(t_\bullet)$  gilt:

$$\text{Ist } f(t_\bullet) < \delta, \text{ so folgt } |c_{P_\bullet} - d\hat{\pi}| < \varepsilon.$$

*Beweis:* Nach Aussage (4) im Teil (A) der vorangehenden Repetition gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt es also ein  $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$  so, dass

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2r\hat{\pi}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } |x| < \delta(\varepsilon).$$

Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig aber fest und sei  $\delta = \delta(\varepsilon)$ . Es folgt

$$(\textcircled{a}) \quad |\sin(x) - x| < |x| \frac{\varepsilon}{2r\hat{\pi}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta.$$

Sei nun  $t_\bullet = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  eine  $n$ -Partition von  $[0, 2\hat{\pi}[$  mit  $f(t_\bullet) < \delta$ . Weil  $t_{i+1} - t_i \leq f(t_\bullet)$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , folgt

$$(\textcircled{a}\textcircled{a}) \quad \frac{t_{i+1} - t_i}{2} < \frac{\delta}{2}, \delta \text{ für alle } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Anwendung von  $(\textcircled{a})$  mit  $x := \frac{t_{i+1} - t_i}{2}$  liefert – unter Beachtung von  $(\textcircled{a}\textcircled{a})$  – das Folgende:

$$\begin{aligned} \left| \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) - \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right| &< \left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) \frac{\varepsilon}{2r\hat{\pi}} = \\ &= (t_{i+1} - t_i) \frac{\varepsilon}{4r\hat{\pi}} \text{ für alle } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Wir erhalten – mit Hilfe der im Teil (B) der obigen 'Definition und Bemerkung' gegebenen Formel für den Umfang von  $P_\bullet$  und unter Beachtung der Gleichheit

$\sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) = 2\hat{\pi}$  – tatsächlich die Beziehung:

$$\begin{aligned}
|c_{P_\bullet} - d\hat{\pi}| &= |c_{P_\bullet} - 2r\hat{\pi}| = \\
\left| 2r \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) - 2r\hat{\pi} \right| &= \left| 2r \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) - r \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) \right| = \\
&= \left| 2r \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) - 2r \sum_{i=1}^n \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right| = \\
&= 2r \left| \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) - \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right| \leq \\
&\leq 2r \sum_{i=1}^n \left| \sin\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right) - \frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right| < \\
&< 2r \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) \frac{\varepsilon}{4r\hat{\pi}} = 2r2\hat{\pi} \frac{\varepsilon}{4r\hat{\pi}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

**Korollar.** *Ist*

$$(t_{\bullet}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } t_{\bullet}^{[k]} = (t_i^{[k]})_{i=1}^{n^{[k]}}, \quad (0 \leq t_1^{[k]} < t_2^{[k]} < \dots < t_{n^{[k]}}^{[k]} < 2\hat{\pi})$$

eine Folge von Partitionen des Intervalls  $[0, 2\hat{\pi}[$  derart, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{\bullet}^{[k]}) = 0,$$

so gilt für den Umfang

$$c_{P_{\bullet}^{[k]}} := \sum_{i=1}^{n^{[k]}} \text{dist}(P_i^{[k]}, P_{i+1}^{[k]})$$

des auf  $\mathcal{C}$  definierten Vieleckes  $P_{\bullet}^{[k]} = \varphi(P^{[k]})$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{P_{\bullet}^{[k]}} = d \cdot \hat{\pi}.$$

**Korollar.**  $\pi = \hat{\pi}$ . *Beweis:* Man wende das vorangehende Korollar an auf die Folge  $(t_{\bullet}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  der Partitionen

$$(t_{\bullet}^{[k]}) = (t_i^{[k]}) := (i-1) \frac{\hat{\pi}}{2^k} \Big|_{i=1}^{2^k} = \left(0, \frac{\hat{\pi}}{2^k}, \frac{2\hat{\pi}}{2^k}, \dots, \frac{(i-1)\hat{\pi}}{2^k}, \dots, \frac{2^{k-1}\hat{\pi}}{2^k}\right)$$

des Intervalles  $[0, 2\hat{\pi}[$ .

# Die Quadratur des Kreises

## Arithmetik mit Zirkel und Lineal

**Vorbemerkung.** (A) ( $\pi$  mit Zirkel und Lineal Konstruieren) Schon in der Antike tauchte das *Problem der Quadratur des Kreises* auf. Dabei ging es darum, eine geometrische Konstruktion anzugeben, die es erlaubt, aus einem gegebenen Kreis ein Quadrat zu konstruieren, das die gleiche Fläche hat wie der Kreis. Unter “Konstruieren” wird dabei “Konstruieren mit Zirkel und Lineal” verstanden. Man sieht leicht, dass das Problem der Quadratur des Kreises gleichbedeutend ist zum Problem, aus einer Strecke der Länge  $a$  eine Strecke der Länge  $\pi \cdot a$  zu konstruieren. Wählt man  $a = 1$  – ist die gegebene Strecke also eine *Einheits-Strecke* – so kann man das Problem der Quadratur des Kreises auch so stellen:

*Man konstruiere aus einer Einheits-Strecke mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge  $\pi$ .*

Dabei sollte die durchgeführte Konstruktion “theoretisch genau sein”, also in beweisbarer Weise eine Strecke der Länge  $\pi$  liefern. Diese Frage nach der *Konstruierbarkeit von  $\pi$*  ist in Tat und Wahrheit keine geometrische Frage, sondern eine Frage nach der Natur der Zahl  $\pi$ .

Schon Carl Friedrich Gauss bemerkte im Alter von 18 Jahren, dass das Problem, aus einer Einheitsstrecke eine Strecke von gegebener Länge  $l$  zu konstruieren, eigentlich kein geometrisches Problem ist, sondern viel eher eine Frage nach der Natur der Zahl  $l$ . Er setzte diese Erkenntnis in grossartiger Weise um, indem er im Jahre 1795 bewies, dass ein reguläres Vieleck mit primärer Ecken-Zahl  $p$  genau dann konstruierbar ist, wenn  $p$  eine sogenannte *Fermatsche Primzahl* ist, also von der Form  $2^{2^n} + 1$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Er gab dabei auch gleich eine Konstruktion für das  $17 = (2^{2^2} + 1)$ -Eck an.

Seit dem im Jahre 1882 von Ferdinand von Lindemann erbrachten Beweis, dass  $\pi$  zu den *transzendenten Zahlen* gehört, weiss man auch, dass  $\pi$  im obigen Sinne nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist – und damit auch, dass die Quadratur des Kreises nicht möglich ist.

Natürlich gibt es sehr genaue Näherungs-Konstruktionen für die Zahl  $\pi$  und damit für die Quadratur des Kreises. So lässt sich etwa der schon erwähnte Spechtsche Näherungswert  $\frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{439}{278}} \approx \pi$  aus dem Jahre 1828 im obigen Sinne genau konstruieren und liefert damit eine Näherungs-Konstruktion für  $\pi$ , die theoretisch auf  $0.3 \cdot 10^{-6}\%$  genau ist. Der Vortragende, der in jungen Jahren einmal eine Ausbildung zum Maschinenzeichner angefangen hatte, weiss von damals her, dass selbst ein geübter Zeichner mit Zirkel und Lineal kaum eine Genauigkeit von unter einem Prozent erreicht. Somit schießt die von C.G. Specht angegebene Konstruktion für praktische Belange weit über das Ziel

hinaus.

(B) (*Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal*) Wir wollen nun dem erwähnten und von Gauss entdeckten Zusammenhang zwischen der geometrischen Konstruierbarkeit von Strecken und der arithmetischen Natur ihrer Längen nachgehen. Dazu wollen wir die Menge der “mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen” untersuchen. Erstes Ziel ist aufzuzeigen, dass die vier arithmetischen Grund-Operationen und das Ziehen von Quadratwurzeln mit geometrischen Konstruktionen vorgenommen werden können, die nur Zirkel und Lineal benötigen. Als Vorbereitung dazu erinnern wir zunächst an die folgenden vier aus den uneren Schulklassen bekannten Grundkonstruktionen, die alle mit Zirkel und Lineal durchführbar sind:

- (1) (*Übertragung einer Strecke*) Sei  $g \subseteq E$  eine Gerade und sei  $P \in g$  ein Punkt. Seien  $A, B \in E$  zwei verschiedene Punkte. Man konstruiere die zwei Punkte  $Q, Q' \in g$  mit  $\text{dist}(P, Q) = \text{dist}(P, Q') = \text{dist}(A, B)$ . Dies erlaubt jede Strecke in eine Strecke gleicher Länge zu übertragen, welche in  $g$  liegt  $P$  als Endpunkt hat.
- (2) (*Halbieren einer Strecke*) Seien  $P, Q \in E$  zwei verschiedene Punkte. Man konstruiere den *Mittelpunkt* der Strecke  $[P, Q]$ , also den einzigen Punkt  $M \in [P, Q]$  mit  $\text{dist}(P, M) = \text{dist}(M, Q)$ . Dies erlaubt eine Strecke in zwei gleich lange Teilstrecken zu zerlegen.
- (3) (*Parallelen ziehen*) Sei  $g \subseteq E$  eine Gerade und sei  $P \in E \setminus g$  ein Punkt. Man konstruiere eine Gerade  $h \subseteq E$ , die *parallel* zu  $g$  ist und den Punkt  $P$  enthält – also die einzige Gerade  $h \subseteq E$  mit

$$h \parallel g \quad \text{und} \quad P \in h.$$

Zur Erinnerung: Gemäss Definition bedeutet die Parallelitäts-Relation  $h \parallel g$  zweier Geraden  $g, h \subseteq E$ , dass entweder  $h = g$  oder dann  $h \cap g = \emptyset$ .

- (4) (*Konstruktion rechter Winkel*) Sei  $g \subseteq E$  eine Gerade und sei  $P \in E$  ein Punkt. Man konstruiere die einzige Gerade  $h \subseteq E$ , welche *senkrecht steht* auf der Geraden  $g$  und  $P$  enthält. Dies erlaubt, eine Gerade  $h$  zu konstruieren, welche den Punkt  $P$  enthält und eine gegebene Gerade  $g$  unter einem *rechten Winkel* schneidet.

Wir wollen nun die vier Grund-Operationen der Arithmetik, aber auch das Wurzelziehen unter Zuhilfenahme von Zirkel und Lineal realisieren. Wir gehen davon aus, dass es sich dabei um Dinge handelt, die in der Schule auch ihren Platz haben. Deshalb behandeln wir das Thema in einer “Repetition”.

**Repetition.** (A) (*Zirkel und Lineal rechnen lassen*) Ab jetzt nehmen wir immer an, es sei eine Einheits-Strecke vorgegeben, sowie zwei Strecken der Länge  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ . Der Einfachheit halber nehmen wir an, es sei  $a \geq b$ . Wir erinnern daran, dass dann nur mit Zirkel und Lineal Strecken der Längen

$$a + b, \quad a - b, \quad ab, \quad \frac{a}{b} \quad \text{and} \quad \sqrt{a}$$

konstruiert werden können. Wir werden hier diese Konstruktionen nicht beschreiben und nicht begründen. Wir verweisen vielmehr auf die entsprechenden Illustrationen (und zugehörigen Kommentare) in [Br1]:

- (1) Konstruktion von  $a + b$  : vgl. Figure 5.1 in [Br1].
- (2) Konstruktion von  $a - b$  : vgl. Figure 5.2 in [Br1].
- (3) Konstruktion von  $ab$  : vgl. Figure 5.3 in [Br1].
- (4) Konstruktion von  $\frac{a}{b}$  : vgl. Figure 5.4 in [Br1].
- (5) Konstruktion von  $\sqrt{a}$  : vgl. Figure 5.2 in [Br1].

Die hier vorgestellten fünf Konstruktionen nennen wir die *arithmetischen Grundkonstruktionen*. Durch Hintereinanderausführen dieser arithmetischen Grundkonstruktionen kann man natürlich auch Strecken konstruieren, deren Länge durch einen “verschachtelten Zahlterm” gegeben ist. In diesem Fall sagen wir dann kurz, wir “hätten die durch den entsprechenden Term darbestellte Zahl konstruiert”.

(B) (*Ins Klassenzimmer damit!*) Hier ein paar Vorschläge: Beweisen Sie, dass die oben genannten Konstruktionen das Gewünschte auch wirklich liefern. Suchen Sie allenfalls nach weiteren Konstruktionen, die das Gleiche leisten. Versuchen Sie diese Konstruktionen in der Schule zu behandeln. Die nachfolgenden Aufgaben sollen weitere Anregung zur Umsetzung im Unterricht geben.

**Aufgaben.** Diese Aufgabe soll das am Schluss von Teil (A) in der vorangehenden “Repetition” gesagte vertiefen.

- (30) Geben Sie sich eine Einheits-Strecke vor und konstruieren Sie die folgenden Zahlen  $a$ :
  - (a)  $a = 3$
  - (b)  $a = \frac{2}{3}$
  - (c)  $a = \sqrt{5}$
  - (d)  $a = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$
  - (e)  $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}$
- (31) Oft lohnt es sich, Zahlterme genauer anzuschauen, und sie dann nicht einfach durch Hintereinanderausführen der fünf arithmetischen Grundkonstruktionen zu gewinnen, sondern mit einfacheren und der Situation angepassten - Konstruktionen. Zur Illustration löse man die folgenden Aufgaben, in welchen  $0 < a < b$  :
  - (a)  $\sqrt{a^2 + b^2}$
  - (b)  $\sqrt{b^2 - a^2}$
  - (c)  $\sqrt{ab}$
  - (d)  $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \frac{a}{16} + \dots$
  - (e)  $a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{4} + \frac{a^4}{8} + \frac{a^5}{16} + \dots$  ( $0 < a < 2$ ).
  - (f)  $a \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

## Konstruierbare Zahlen

**Vorbemerkung.** Nun wollen wir die Menge aller Zahlen untersuchen, die man durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal gewinnen kann. Wir stellen uns dabei auf den Standpunkt der Algebra und setzen insbesondere den Begriff des Körpers voraus.

**Definition und Bemerkung (A)** (*Konstruktiv abgeschlossene Körper*) Wir betrachten nun Mengen  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ , welche den folgenden Bedingungen genügen:

- (1) (*Unitarität*)  $1 \in \mathbb{S}$ .
- (2) (*Abgeschlossenheit unter Addition*) Sind  $a, b \in \mathbb{S}$ , so ist  $a + b \in \mathbb{S}$ .
- (3) (*Abgeschlossenheit unter Subtraktion*) Sind  $a, b \in \mathbb{S}$ , so ist  $a - b \in \mathbb{S}$ .
- (4) (*Abgeschlossenheit unter Multiplikation*) Sind  $a, b \in \mathbb{S}$ , so ist  $ab \in \mathbb{S}$ .
- (5) (*Abgeschlossenheit unter Division*) Sind  $a, b \in \mathbb{S}$  mit  $b \neq 0$ , so ist  $\frac{a}{b} \in \mathbb{S}$ .
- (6) (*Abgeschlossenheit unter Quadratwurzelziehen*) Ist  $a \in \mathbb{S}$  mit  $a \geq 0$ , so ist  $\sqrt{a} \in \mathbb{S}$ .

Die Bedingungen (1)-(5) besagen, dass  $\mathbb{S}$  ein *Unterkörper* des Körpers  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist. Wir nennen eine Menge  $\mathbb{S}$ , die den obigen Bedingungen (1)-(6) genügt, einen *konstruktiv abgeschlossenen Unterkörper* von  $\mathbb{R}$ .

Es sei als Aufgabe gestellt zu zeigen, dass ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper  $\mathbb{S}$  von  $\mathbb{R}$  die folgende Eigenschaft hat, die unsere Namensgebung überhaupt erst rechtfertigt:

- (7) (*Abgeschlossenheit unter Konstruktionen mit Zirkel und Lineal*) Sei  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$  ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper, sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien

$$a_i := \text{dist}(P_i, Q_i) \in \mathbb{S}, \quad (P_i, Q_i \in E; i = 1, 2, \dots, n)$$

Längen von Strecken  $[P_i, Q_i] \subseteq E$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Sei  $s = \text{dist}(P, Q)$  die Länge einer Strecke  $[P, Q] \subseteq E$ , welche aus den vorgegebenen  $n$  Strecken  $[P_i, Q_i]$  durch wiederholte Anwendung der fünf arithmetischen Grundkonstruktionen hervorgeht. Dann gilt

$$s \in \mathbb{S}.$$

Dies zeigt, dass arithmetische Operationen, welche durch arithmetische Konstruktionen realisiert werden, nicht aus einem konstruktiv abgeschlossenen Unterkörper von  $\mathbb{R}$  hinausführen. Schliesslich beweist man mit bescheidenem Aufwand folgende Aussagen:

- (8)  $\mathbb{R}$  ist ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von  $\mathbb{R}$ .
- (9)  $\mathbb{Q}$  ist kein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von  $\mathbb{R}$ .
- (10) Ist  $\mathbb{S}$  ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von  $\mathbb{R}$ , so gilt  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{S}$ .
- (11) Ist  $\mathbb{S}$  ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von  $\mathbb{R}$  und  $q \in \mathbb{S}$  mit  $q > 0$ , so gilt

$$q^{\frac{1}{2^n}} \in \mathbb{S} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(B) (*Der Körper der konstruierbaren Zahlen*) Das Beweisen der nachfolgenden Aussagen sei als Übungsaufgabe gestellt:

- (12) Sei  $\mathfrak{S}$  eine Menge von konstruktiv abgeschlossenen Unterkörpern  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist der Durchschnitt aller Mitglieder von  $\mathfrak{S}$ , wieder ein konstruktiv abgeschlossener Körper, d.h.:

$$\bigcap_{\mathbb{S} \in \mathfrak{S}} \mathbb{S} \quad \text{ist ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von } \mathbb{R}.$$

- (13) Der Durchschnitt

$$\mathbb{K} := \bigcap_{\{\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{S} \text{ ist ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper}\}} \mathbb{S}$$

aller konstruktiv abgeschlossenen Unterkörper von  $\mathbb{R}$  ist ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von  $\mathbb{R}$ .

- (14) Ist  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$  ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von  $\mathbb{R}$  und ist  $\mathbb{K}$  definiert wie in Aussage (13), so gilt  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{S}$ . Das heisst:  $\mathbb{K}$  ist der *kleinste konstruktiv abgeschlossene Unterkörper von  $\mathbb{R}$* .
- (15) Der konstruktiv abgeschlossene Unterkörper  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$  aus Aussage (13) besteht aus allen Zahlen, die man aus 1 erhält, indem man endlich viele der in Teil (A)(2)-(6) genannten fünf arithmetischen Operationen durchführt.
- (16) Der konstruktiv abgeschlossene Unterkörper  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$  aus Aussage (13) besteht aus allen Zahlen, die man aus den rationalen Zahlen erhält, indem man endlich viele der in Teil (A)(2)-(6) genannten fünf arithmetischen Operationen durchführt.
- (17) Ist  $a \in \mathbb{K}$  die Länge einer Strecke, so kann diese Strecke aus der Einheits-Strecke mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Der in Aussage (13) definierte Körper  $\mathbb{K}$  (der in (14) - (16) charakterisiert wird) heisst der *Körper der konstruierbaren Zahlen*. Die Zahlen  $a \in \mathbb{K}$  heissen *konstruierbare Zahlen*. Die Rechtfertigung für diese Bezeichnung wird durch Aussage (17) gegeben. Man beachte, dass konstruierbare Zahlen durch recht komplizierte Terme gegeben sein können, aufgebaut aus rationalen Zahlen, Quadratwurzeln und kombiniert mit den vier arithmetischen Grundoperationen. Ein Beispiel ist die Zahl

$$c = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{7}}}{5+\sqrt{11}}}{\sqrt{3} - 1}}.$$

Ein anderes, einfacher hinzuschreibendes Beispiel ist der schon erwähnte Spechtsche Näherungsterm für  $\pi$ :

$$\frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{439}{278}} \approx \pi.$$

Behalten wir im Auge, dass nach Aussage (17) eine Zahl  $a \in \mathbb{K}$  die Eigenschaft hat, dass eine Strecke der Länge  $|a|$  mit Zirkel und Lineal aus einer Einheits-Strecke konstruiert werden kann. Wenn wir die Konstruktion einer



solchen Strecke durchführen, sagen wir einfach dass wir *die Zahl a konstruieren*.

**Bemerkung.** Wir können nach den obigen Ausführungen die Frage nach der Quadratur des Kreises oder – gleichbedeutend – nach der Konstruierbarkeit von  $\pi$  jetzt in kompakter Form wie folgt hinschreiben:

$$\pi \in \mathbb{K}?$$

**Aufgaben.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ .

- (32) Zeigen Sie, dass  $\sin(x) \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \cos(x) \in \mathbb{K}$  und drücken Sie in geometrischen Termen aus, was es bedeutet, dass  $\sin(x) \in \mathbb{K}$ .
- (33) Diskutieren Sie das in Aufgabe (32) Gesagte für den Fall, dass  $x = \frac{\pi}{9}$ .

## Die Transzendenz von $\pi$

**Vorbemerkung.** Wir wollen nun der eben gestellten Frage “ $\pi \in \mathbb{K}$ ?” noch etwas besser auf den Grund gehen, obwohl wir ja schon verweg genommen haben, dass sie wegen der Transzendenz von  $\pi$  eine negative Antwort hat. Wir können hier natürlich diese Transzendenz-Aussage nicht beweisen. Wir wollen dafür aber immerhin zeigen, dass die konstruierbaren Zahlen nicht transzendent sein können. Dazu werden wir den Begriff der *algebraischen Zahl* einführen und uns klar machen, dass alle konstruierbaren Zahlen algebraisch sind. Weil die transzendenten Zahlen nach Definition genau die nicht-algebraischen sind, verstehen wir die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises dann immerhin bis auf den Nachweis, dass  $\pi$  transzendent ist.

Um die algebraischen Zahlen befriedigend einführen zu können, benötigen wir den Begriff des *Vektorraumes* und den Begriff der *Dimension* eines solchen. Ausgangspunkt zur Behandlung der algebraischen Zahlen ist das folgende Resultat.

**Satz.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Es besteht eine Gleichung  
 $z_n a^n + z_{n-1} a^{n-1} + \cdots + z_1 a + z_0 = 0$  mit  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{Z}$  und  $z_n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Es besteht eine Gleichung  
 $z_n a^n + z_{n-1} a^{n-1} + \cdots + z_1 a + z_0 = 0$  mit  $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$  und  $z_n \neq 0$ .
- (iii) Es besteht eine Gleichung  
 $q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \cdots + q_1 a + q_0 = 0$  mit  $q_0, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$  und  $q_n \neq 0$ .
- (iv) Es besteht eine Gleichung  
 $a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \cdots + q_1 a + q_0 = 0$  mit  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in \mathbb{Q}$ .
- (v) Die Elemente  $1, a, \dots, a^{n-1}$  erzeugen den  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum

$$\mathbb{Q}[a] := \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \mathbb{Q} a^i = \left\{ \sum_{j=0}^m q_j a^j \mid m \in \mathbb{N}_0 \text{ und } q_0, q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

(vi) Die Dimension des  $\mathbb{Q}$ -Vektorraumes  $\mathbb{Q}[a]$  aus Aussage (v) genügt der Ungleichung

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[a]) \leq n.$$

*Beweis:* Die Äquivalenzen

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$$

sind leicht zu beweisen, und wir überlassen dies als Aufgabe.

(iv)  $\Rightarrow$  (v): Nehmen wir an, es bestehe eine Gleichung

$$a^n + q_{n-1}a^{n-1} + \dots + q_1a + q_0 = 0 \text{ mit } q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in \mathbb{Q}.$$

Sei

$$w := \sum_{j=0}^m s_j a^j \in \mathbb{Q}[a], \quad (m \in \mathbb{N}_0, \text{ und } s_0, s_1, \dots, s_m \in \mathbb{Q}).$$

Wir müssen zeigen:

(@) Es gibt Zahlen  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$  so, dass  $w = \sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i$ .

Dazu betrachten wir die beiden Polynome

$$f(X) := X^n + q_{n-1}X^{n-1} + \dots + q_1X + q_0, \quad g(X) := \sum_{j=0}^m s_j X^j \in \mathbb{Q}[X].$$

Nach dem *Euklidischen Restsatz für Polynome* finden wir Polynome  $h(X), r(X) \in \mathbb{Q}[X]$  derart, dass

$$g(X) = f(X)h(X) + r(X) \text{ und } \deg(r(X)) \leq n-1,$$

wobei  $\deg(r(X))$  für den *Grad* des Polynomes  $r(X)$  steht. Wir schreiben

$$r(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i, \text{ mit } b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}.$$

Wegen  $f(a) = a^n + q_{n-1}a^{n-1} + \dots + q_1a + q_0 = 0$  folgt, dass

$$w = \sum_{j=0}^m s_j a^j = g(a) = f(a)h(a) + r(a) = r(a) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i.$$

Die beweist die Behauptung (@).

(v)  $\Rightarrow$  (vi): Folgt sofort aus der Definition der Dimension eines Vektorraumes.

(vi)  $\Rightarrow$  (iii): Wir nehmen an, es sei  $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[a]) \leq n$ . Wegen  $1, a, a^2, \dots \in \mathbb{Q}[a]$  folgt, dass die  $n+1$  Elemente  $1, a, a^2, \dots, a^n$  linear unabhängig sind über  $\mathbb{Q}$ . Deshalb finden wir ein  $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  und Elemente  $t_0, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{Q}$  so, dass

$$t_m a^m + t_{m-1} a^{m-1} + \dots + t_1 a + t_0 = 0 \text{ und } t_m \neq 0.$$

Wir setzen

$$q_i := \begin{cases} 0, & \text{für } i = 0, 1, \dots, n-m-1; \\ t_{i-n+m}, & \text{für } i = n-m, n-m+1, \dots, n. \end{cases}$$

Dann gilt  $q_n = t_m \neq 0$  und

$$\begin{aligned}
 & q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \cdots + q_1 a + q_0 = \\
 & = q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \cdots + q_{n-m} a^{n-m} + q_{n-m-1} a^{n-m-1} + q_1 a + q_0 = \\
 & = q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \cdots + q_{n-m} a^{n-m} = \\
 & = t_m a^n + t_{m-1} a^{n-1} + \cdots + t_1 a^{n-n+1} + t_0 a^{n-m} = \\
 & = (t_m a^m + t_{m-1} a^{m-1} + \cdots + t_1 a + t_0) a^{n-m} = 0 a^{n-m} = 0.
 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Bedingung (iii) gilt.

**Definition und Bemerkung.** (A) (*Algebraische Zahlen und ihr Grad*) Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heisst eine (*reelle*) *algebraische Zahl*, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  so gibt, dass die äquivalenten Bedingungen (i)–(vi) des vorangehenden Satzes erfüllt sind. Die kleinste Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , für welche dies der Fall ist, heisst der *Grad* von  $a$  und wird mit  $\deg(a)$  bezeichnet. Die Menge der (reellen) algebraischen Zahlen bezeichnen wir mit  $\mathbb{A}$ , also:

$$\mathbb{A} := \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ ist eine algebraische Zahl}\}.$$

(B) (*Eigenschaften algebraischer Zahlen.*) Der Nachweis der folgenden Aussagen ist ohne grossen Aufwand zu erbringen und sei als Aufgabe gestellt

- (1)  $\mathbb{Q} = \{a \in \mathbb{A} \mid \deg(a) = 1\}$ .
- (2) Für alle  $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$  und alle  $r \in \mathbb{N}$  gilt

$$q^{\frac{1}{r}} \in \mathbb{A} \quad \text{und} \quad \deg(q^{\frac{1}{r}}) \leq r.$$

- (3) Ist  $a \in \mathbb{A}_{\geq 0}$  und  $r \in \mathbb{N}$ , so gilt  $a^{\frac{1}{r}} \in \mathbb{A}$ .
- (4) Ist  $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$  mit  $\deg(a) = n$ , so genügt  $a$  einer algebraischen Gleichung der Form

$$q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + \cdots + q_1 a + 1 = 0 \quad \text{mit} \quad q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Q}.$$

- (5) Ist  $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ , so ist auch  $\frac{1}{a} \in \mathbb{A}$ .
- (6) Ist  $z \in \mathbb{N}$  keine Quadratzahl, so gilt  $\deg(\sqrt{z}) = 2$ .
- (7)  $2^{\frac{1}{3}} \in \mathbb{A}$  mit  $\deg(2^{\frac{1}{3}}) = 3$ .

Nun gehen wir den Zusammenhang zwischen den konstruierbaren und den algebraischen Zahlen an, und zwar mit dem folgenden Resultat:

**Satz.** *Die Menge  $\mathbb{A}$  der reellen algebraischen Zahlen ist ein konstruktiv abgeschlossener Unterkörper von  $\mathbb{R}$ .*

*Beweis:* Zuerst zeigen wir, dass  $\mathbb{A}$  abgeschlossen ist unter der Addition, Subtraktion und der Multiplikation. Seien also

$$a, b \in \mathbb{A} \quad \text{mit} \quad \deg(a) = m \quad \text{und} \quad \deg(b) = n.$$

Wir betrachten den  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[a, b] &:= \sum_{i, j \in \mathbb{N}_0} \mathbb{Q}a^i b^j = \\ &= \left\{ \sum_{i, j \in \mathbb{N}_0: i+j \leq p} q_{i, j} a^i b^j \mid p \in \mathbb{N}_0 \text{ und } q_{i, j} \in \mathbb{Q} \text{ f\"ur alle } i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } i + j \leq p \right\}.\end{aligned}$$

Unser erstes Ziel ist es, zu zeigen:

$$(\textcircled{a}) \quad \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[a, b]) \leq mn.$$

Dazu beweisen wir:

( $\textcircled{a}\textcircled{a}$ ) Der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{Q}[a, b]$  ist erzeugt durch die Elemente

$$a^i b^j \text{ mit } 0 \leq i < m \text{ und } 0 \leq j < n.$$

Da der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{Q}[a, b]$  erzeugt ist durch die Elemente  $a^k b^l$  mit  $k, l \in \mathbb{N}_0$ , genügt es zu zeigen, dass jedes dieser erzeugenden Elemente eine  $\mathbb{Q}$ -Linearkombination der in ( $\textcircled{a}\textcircled{a}$ ) genannten Elemente ist.

Seien also  $k, l \in \mathbb{N}_0$ . Nach dem vorangehenden Satz haben wir dann:

$$a^k \in \mathbb{Q}[a] = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{Q}a^i \text{ und } b^l \in \mathbb{Q}[b] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{Q}b^j.$$

Deshalb finden wir Elemente  $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{Q}$  derart, dass

$$a^k = \sum_{i=0}^{m-1} u_i a^i \text{ und } b^l = \sum_{j=0}^{n-1} v_j b^j.$$

Weil  $q_{i, j} := u_i v_j \in \mathbb{Q}$  für alle  $i = 0, 1, \dots, m-1$  und alle  $j = 0, 1, \dots, n-1$  erhalten wir

$$\begin{aligned}a^k b^l &= \left( \sum_{i=0}^{m-1} u_i a^i \right) \left( \sum_{j=0}^{n-1} v_j b^j \right) = \\ &= \sum_{i \in \{0, 1, \dots, m-1\}; j \in \{0, 1, \dots, n-1\}} u_i v_j a^i b^j = \\ &= \sum_{i \in \{0, 1, \dots, m-1\}; j \in \{0, 1, \dots, n-1\}} q_{i, j} a^i b^j.\end{aligned}$$

Das beweist unsere Behauptung ( $\textcircled{a}\textcircled{a}$ ) und damit auch Behauptung ( $\textcircled{a}$ ).

Nun beachte man, dass für alle  $r \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\begin{aligned}(ab)^r &= a^r b^r \in \mathbb{Q}[a, b], \\ (a+b)^r &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} a^i b^{r-i} \in \mathbb{Q}[a, b] \text{ und} \\ (a-b)^r &= \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} a^i b^{r-i} \in \mathbb{Q}[a, b].\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\mathbb{Q}[ab], \quad \mathbb{Q}[a + b], \quad \mathbb{Q}[a - b] \subseteq \mathbb{Q}[a, b].$$

Mit Hilfe der Aussage (A) erhalten wir deshalb:

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[ab]), \quad \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[a + b]), \quad \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[a - b]) \leq mn.$$

Nach dem vorangehenden Satz folgt nun

$$a + b, \quad a - b, \quad ab \in \mathbb{A},$$

und deshalb ist  $\mathbb{A}$  abgeschlossen unter der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation.

Nach Aussage (B)(5) der obigen "Definition und Bemerkung" folgt jetzt sofort

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{A} \text{ für alle } a \in \mathbb{A} \text{ und alle } b \in \mathbb{A} \setminus \{0\}.$$

Also ist  $\mathbb{A}$  auch abgeschlossen unter der Division.

Schliesslich folgt mit Aussage (B)(3) aus der vorangehenden "Definition und Bemerkung" auch:

$$\sqrt{a} \in \mathbb{A} \text{ für alle } a \in \mathbb{A}_{\geq 0},$$

sodass  $\mathbb{A}$  auch unter dem Ziehen von Quadratwurzeln abgeschlossen ist.

**Satz.** *Konstruierbare Zahlen sind algebraisch, also*

$$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{A}.$$

*Beweis:* Dies folgt aus dem vorangehenden Satz und aus Aussage (B)(14) der "Definition und Bemerkung" im Abschnitt "Konstruierbare Zahlen".

**Definition.** Nicht-algebraische Zahlen, also Zahlen, die zur Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$  gehören, heissen *transzendente (reelle) Zahlen*.

**Hauptsatz.** (F. Lindemann, 1882) *Die Zahl  $\pi$  ist transzendent, also*

$$\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}.$$

**Korollar.** *Die Zahl  $\pi$  ist nicht konstruierbar, also  $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{K}$ .*

*Beweis:* Dies folgt aus dem Hauptsatz und dem ihm vorangehenden Satz.

**Korollar.** *Das Problem der Quadratur des Kreises lässt sich nicht lösen.*

*Beweis:* Dies folgt aus dem vorangehenden Korollar, denn die Frage nach der Quadratur des Kreises ist gleichbedeutend zur Frage nach der Konstruierbarkeit von  $\pi$ .

**Aufgabe.** Zeigen Sie Folgendes:

(34)  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{K}$  sind abzählbar. Äussern Sie "Philosophisches" dazu.

## REFERENCES

- [Bib] DIE HEILIGE SCHRIFT: *Einheitsübersetzung*. Verlag Katholisches Bibelwerk - Deutsche Bibelgesellschaft, Stuttgart (1981), ISBN 978-3-460-32031.
- [Br1] BRODMANN, M.: *Around the Circle*, Notes based on a course for High School teachers in Mathematics, taught at Kabale, Uganda, April 2014, 76 pages; available online under [www.math.uzh.ch](http://www.math.uzh.ch) → Emeritierte Professoren → Brodmann → Publikationen → Lecture Notes and Presentations.
- [Br2] BRODMANN, M.: *Lectures on Local Cohomology*, Institute of Mathematics, Vietnamese Academy of Science and Technology (VAST), Hanoi (2001).
- [Br-Fu-Ro] BRODMANN, M., FUMASOLI, S. UND ROHRER, F.: *First Lectures on Local Cohomology*, Lecture Notes, University of Zrich (2007, extended, preliminary version) available online under [www.math.uzh.ch](http://www.math.uzh.ch) → Emeritierte Professoren → Brodmann → Publikationen → Lecture Notes and Presentations.
- [Br-Sh] BRODMANN, M. UND SHARP, R.Y.: *Local Cohomology-An Algebraic Introduction with Geometric Applications*. Second Edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 136, Cambridge University Press (2012), 505 pages, 330 exercises, ISBN 9780521513630.
- [Ga] GABRIEL, P.: *Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra*, Birkhäuser Advanced Texts / Basler Lehrbücher, Birkhäuser, Basel (1996), 648 pages, ISBN 978-3-7646-5376-6.
- [Pi] PIAGET, J.: *Intellectual evolution from adolescence to adulthood*, Cambridge University Press (1977).
- [Sp] SPITTELER, C.: *Die jodelnde Schildwache*, in: “Carl Spitteler: Balladen”, Albert Müller’s Verlag, Zürich, (1896).

*Kleine pi-bibliographie*

- [Ar-Ha] ARNDT, J. UND HAENEL, C.:  $\pi$ . *Algorithmus, Computer, Arithmetik*. Zweite, neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Springer Berlin (2000), ISBN 3-540-6658-8.
- [Be] BECKMANN, P.: *A History of  $\pi$* . St. Martin’s Press, New York City (1976), ISBN 978-0-312-38185-8.
- [Beh] BEHREND. E. (HERSG.):  *$\pi$  und Co*. Kaleidoskop der Mathematik, Springer Berlin/Heidelberg (2008), ISBN 978-3-540-77888-2.
- [Bl] BLATNER, D.:  $\pi$ . *Magie einer Zahl* (Originaltitel: “The Joy of  $\pi$ ”; übersetzt aus dem Englischen durch H. Kobler). Rororo-Sachbuch Nr. 61176, Rohwohlt, Reinbeck bei Hamburg (2001), ISBN 3-499-61176-7.
- [De] DELAHAYE, P.:  $\pi$ . *Die Story*. Birkhäuser, Basel (1999), ISBN 3-7643-6059-9.

- [Bo-Bo] BORWEIN, J. UND BORWEIN, P.:  *$\pi$  and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity.* Canadian Mathematical Society Series of Monographs. Zweite Auflage, Wiley New York (1998), ISBN 0-471-31515-X.
- [Ma] MARKOWSKI, K.: *Die Berechnung der Zahl  $\pi$  aus Sinus- und Tangens-Intervallen.* Erste Auflage, Trigon, Potsdam (2007), ISBN 786-3-3810752-1-2.
- [Pe] PETIGK, J.: *Dreieckige Kreise oder wie man mit einer Nadel  $\pi$  bestimmen kann.* Mathematische Rätsel, Training fürs Gehirn, Komet, Köln (2007), ISBN 978-3-89836-694-6.
- [Sc] SCHMIDT, K.H.:  *$\pi$ . Geschichte und Algorithmen einer Zahl.* Books on Demand GmbH, Nordstedt (2001), ISBN 3-8311-0809-9.