Geniale geometrische Beweise (Übungen)

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

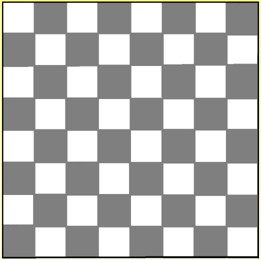
Lehrerfortbildung "Geometrische Geistesblitze"

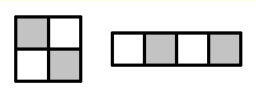
Universität Passau, 20.12.2017

Inhaltsübersicht

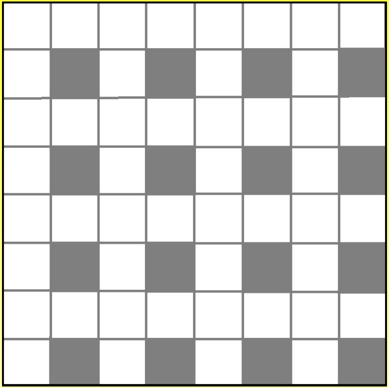
1 Beweis durch Ausmalen

Aufgabe 1. Ein 8×8 Schachbrett sei mit 2×2 und mit 1×4 Tetrominos bedeckt. Kann man ein 2×2 Tetromino entfernen und die restlichen Steine so umlegen, dass man es durch ein 1×4 Tetromino ersetzen kann?





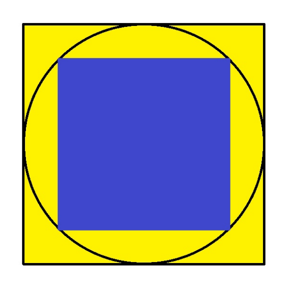
Lösung: Betrachten wir die folgende Färbung des Schachbretts:



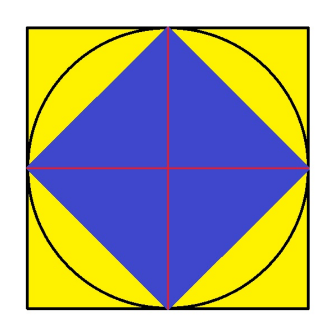
Ein 2x2 Tetromino bedeckt ein schwarzes Feld und ein 1x4 Tetromino bedeckt 0 oder 2. Also ist die Anzahl der 2x2 Tetrominos gerade und der gewünschte Tausch unmöglich.

② Beweis durch Drehen

Aufgabe 2. In einem Quadrat sein ein Kreis einbeschrieben. Diesem sei wiederum ein zweites Quadrat einbeschrieben, dessen Seiten parallel zum ersten Quadrat liegen. Welchen Anteil am Flächeninhalt des ersten Quadrats hat das zweite?

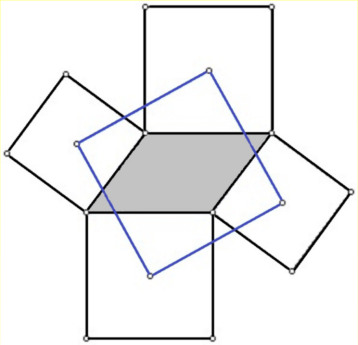


Lösung: Es genügt, das innere Quadrat um 45^o zu drehen.

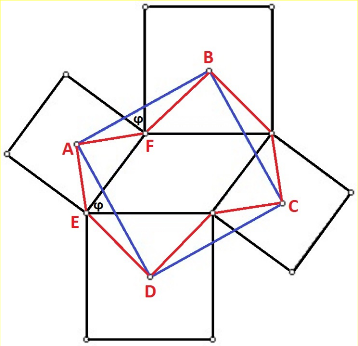


Nun ist es evident, dass das blaue Quadrat genau 50% der Fläche des gelben Quadrats bedeckt.

Aufgabe 3. Über den vier Seiten eines Parallelogramms wird jeweils nach außen ein Quadrat errichtet. Beweisen Sie, dass die vier Mittelpunkte dieser Quadrate selbst ein Quadrat bilden.



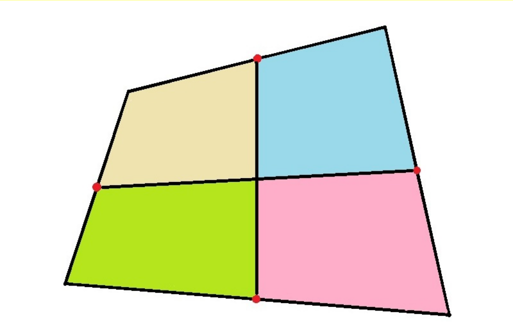
Lösung: Betrachte die folgende Skizze.



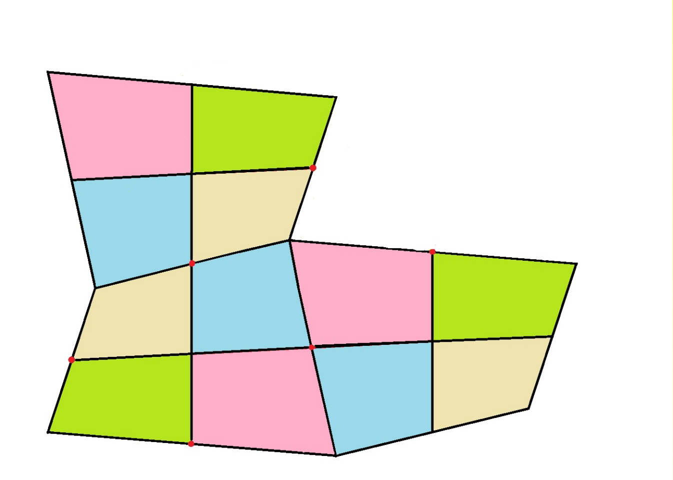
Die Komposition der Drehungen $\varrho(A, 90^o)$, $\varrho(B, 90^o)$, $\varrho(C, 90^o)$ und $\varrho(D, 90^o)$ ist eine Verschiebung, die den Punkt E fest lässt, also die Identität. Nach dem SWS-Satz sind die Dreiecke ΔAED und ΔAFB kongruent. Also bildet $\varrho(A, 90^o)$ den Punkt D auf B ab, u.s.w.

③ Beweis durch Wenden

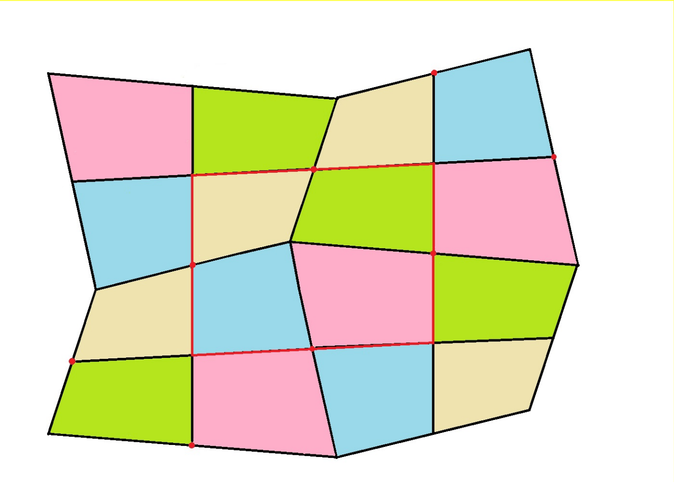
Aufgabe 4. Bei einem konvexen Viereck werden die gegenüberliegenden Seitenmitten verbunden. Beweisen Sie, dass man die vier Teilflächen zu einem Parallelogramm zusammenfügen kann.



Geniale Idee: Führe eine Punktspiegelung an der rechten und an der oberen Seitenmitte durch.

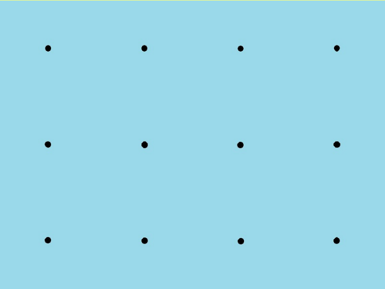


Jetzt verschiebt man das ursprüngliche Viereck noch nach rechts oben. In der Mitte ergibt sich das gesuchte Parallelogramm.

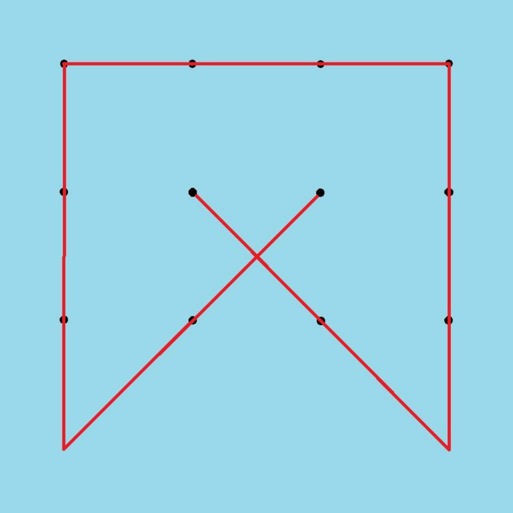


4 Über den Tellerrand gucken

Aufgabe 5. Finden Sie einen Streckenzug aus 5 Strecken, der die folgenden 12 Punkte verbindet.

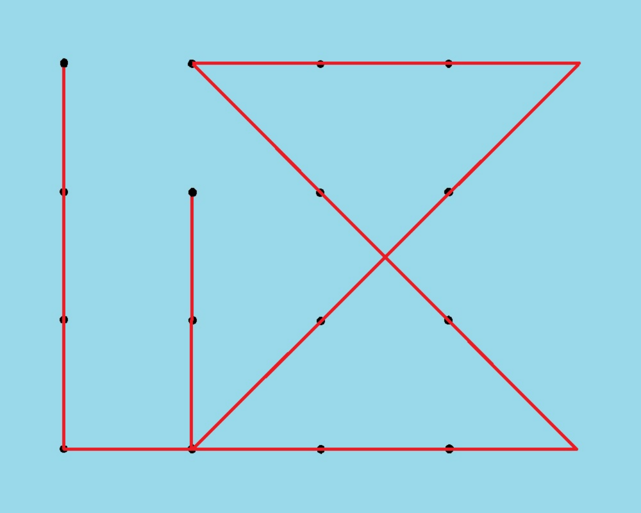


Lösung: Man kann z.B. wieder über den Tellerrand gucken:



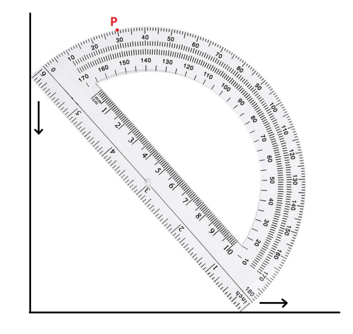
Aufgabe 6: Finden Sie einen Streckenzug aus 6 Strecken, der die folgenden 16 Punkte verbindet.

Lösung: Und noch ein letztes Mal gucken wir über den Tellerrand:



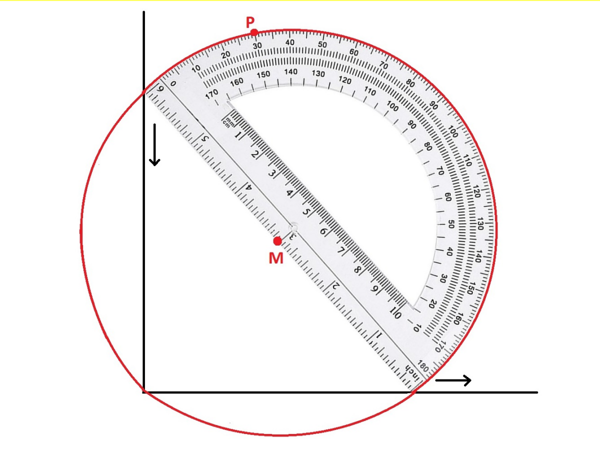
5 Die hohe Kunst der Hilfslinie

Aufgabe 7. Ein halbkreisförmiger Winkelmesser gleitet wie in der folgenden Skizze am Rand des Arbeitsblatts entlang.

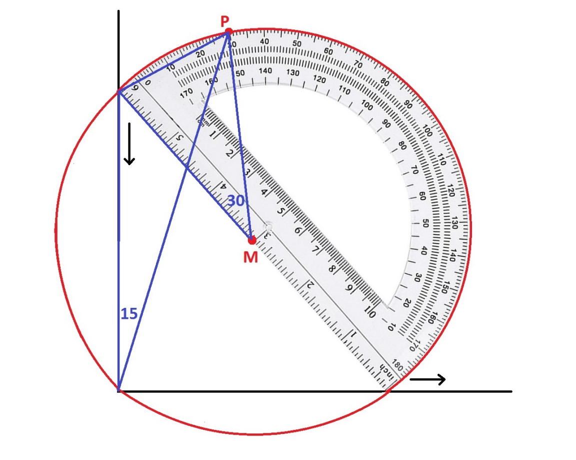


Bestimmen Sie die Kurve, die der Punkt P an der 30^o Markierung bei dieser Bewegung durchläuft.

Lösung: **Geniale Idee:** Erweitere den Halbkreis zu einem vollen Kreis. Dann liegt der Ursprung auf diesem Kreis, denn er ist der Thaleskreis über der geraden Kante des Winkelmessers.

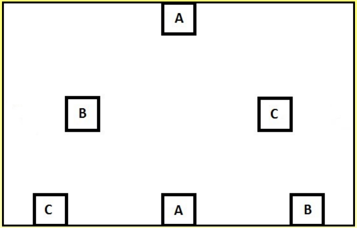


Wenn wir jetzt noch den Umfangswinkelsatz (Fasskreisbogen) anwenden, so folgt, dass sich P auf der Geraden bewegt, die mit der y-Achse einen 15^o-Winkel einschließt.



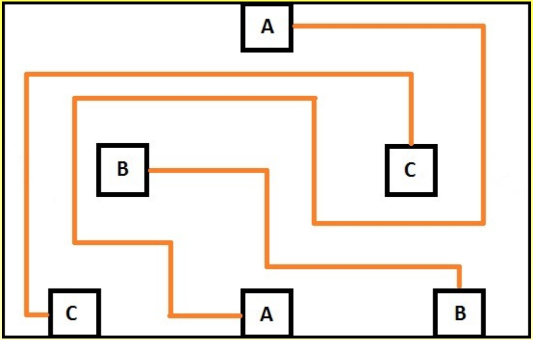
6 Alles Mögliche und Unmögliche

Aufgabe 8. Finde ein Layout für die Leiterbahnen der folgenden Platine.

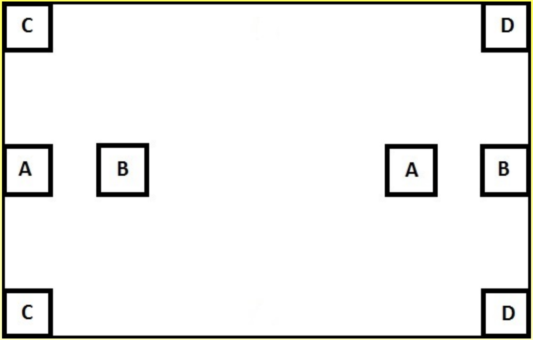


Tip: Löse ein einfacheres Problem und deformiere die Lösung.

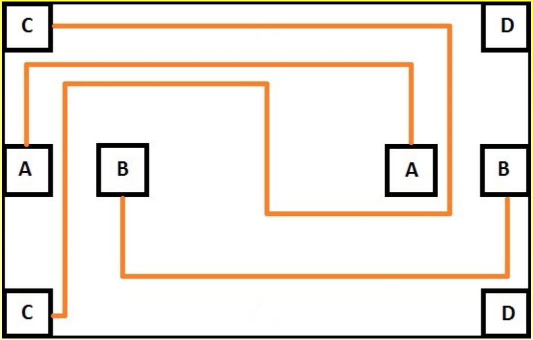
Lösung: Vertausche die Bauteile B und C in der Mitte, verbinde und deformiere dann das Layout.



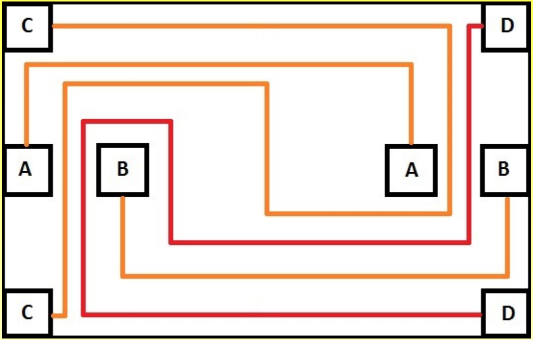
Aufgabe 9. Finde ein Layout für die Leiterbahnen der folgenden Platine.



Lösung: Verbinde zuerst die Bauteile A, B und C wie in den vorherigen Aufgaben.



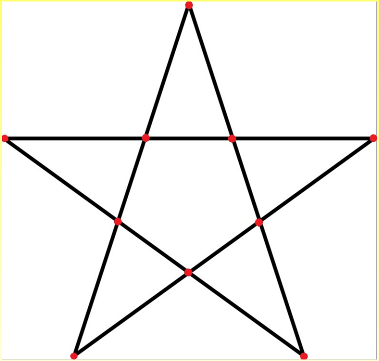
Lösung: Nun verbinde auch noch die Bauteile D.



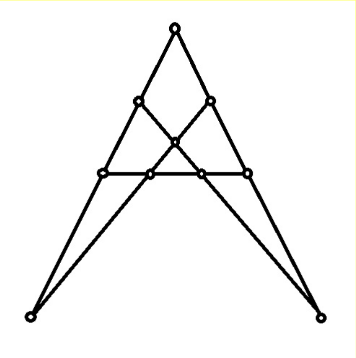
Aufgabe 10. Planze 10 Obstbäume in 5 Viererreihen!

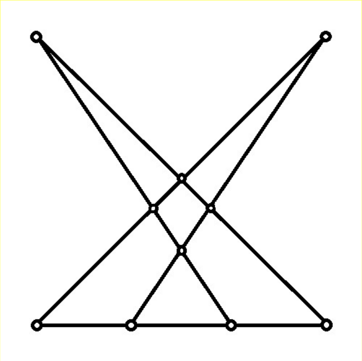
Idee: $10 = 2 \cdot 5$. Starte also mit einem Fünfeck und ergänze es möglichst symmetrisch!

Lösung:



Alternativlösungen:





THE END

Optimist: Ein Mensch, der die Dinge nicht so tragisch nimmt wie sie sind.

(Karl Valentin)

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!