Geniale geometrische Beweise

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung "Geometrische Geistesblitze"

Universität Passau, 20.12.2017

Inhaltsübersicht

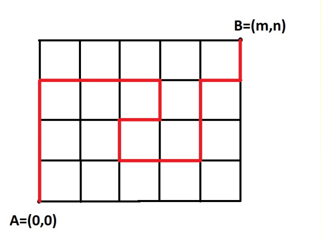
Ideen der LFB: Motivation und Werbung für den Unterricht im geometrischen Beweisen, Anregungen für P-Seminare und W-Seminare, Ideen für spannende Knobelaufgaben mit Ausbaupotential

1 Beweis durch Ausmalen

Schau, ich habe dieses Puzzle in zwei Tagen gelöst!

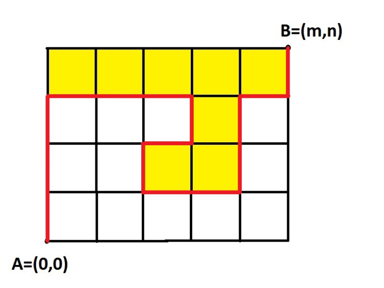
Na und? Auf der Schachtel steht 3-6 Jahre!

Aufgabe 1. In der folgenden Skizze sei w die Anzahl der Wege von A nach B, die sich nicht selbst treffen.



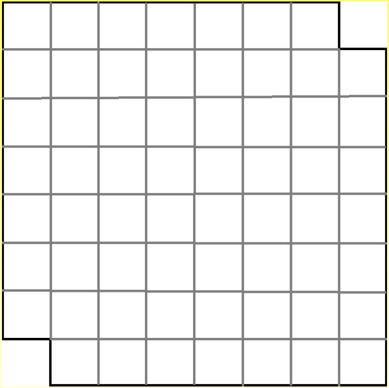
Zeigen Sie: $\binom{m+n}{m} \leq w \leq 2^{mn}$

Lösung: Bei einem kürzesten Weg muss man aus den $m+n$ Bewegungen genau m Mal nach rechts gehen. Also gibt es $\binom{m+n}{m}$ kürzeste Wege.

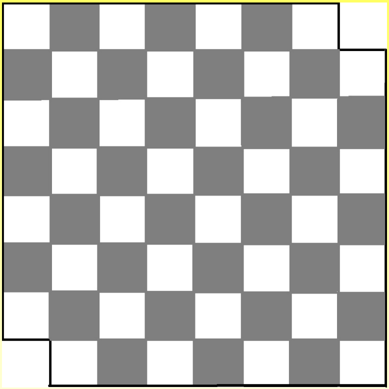


Jeder Weg teilt das Feld in einen oberen und einen unteren Teil. Also gibt es höchstens so viele Wege wie Teilmengen der mn Felder. Dies liefert $w \leq 2^{mn}$.

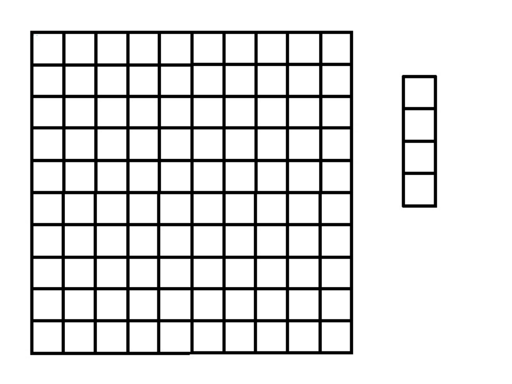
Aufgabe 2. Bei einem Schachbrett werden die zwei gegenüberliegenden Ecken entfernt. Kann man das restliche Feld mit Dominosteinen der Größe von 1×2 Feldern überdecken?



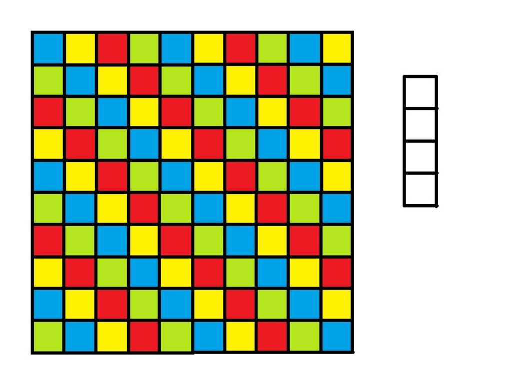
Lösung: Das geht nicht. Jeder Dominostein überdeckt ein weißes und ein schwarzes Feld. Da man aber zwei schwarze Felder entfernt hat, verbleiben 32 weiße und 30 schwarze Felder.



Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass man ein 10×10 Schachbrett nicht mit 1×4 Tetrominos auslegen kann.



Lösung: Wir färben das Brett wie folgt mit vier Farben ein.

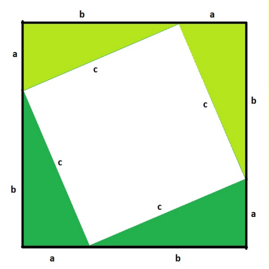


Legt man nun ein Tetromino auf das Brett, so bedeckt es ein Feld jeder Farbe. Man braucht $(10 \cdot 10)/4 = 25$ Tetrominos. Da es aber 26 blaue Felder gibt, existiert keine Überdeckung der gewünschten Art.

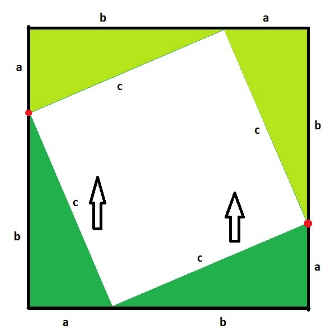
② Beweis durch Drehen

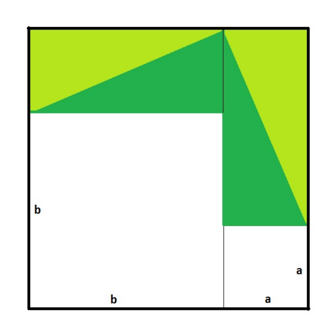
Ich gebe diese Vorlesung den Erstsemestern jetzt schon seit über 20 Jahren. Man könnte versucht sein zu glauben, dass sie sie inzwischen verstehen.

Aufgabe 4. Wie baut man eine **Pythagoras Beweismaschine**?



Mache die dunkelgrünen Dreiecke um die roten Punkte drehbar.

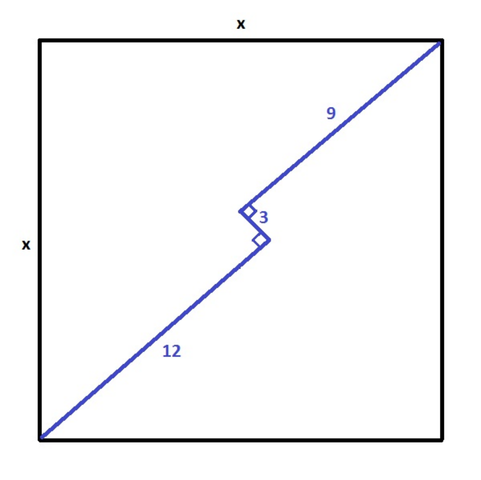




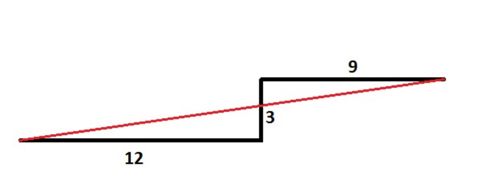
Was hat die zweite Figur mit der 1. binomischen Formel zu tun?

Idee: P-Seminar "Wir bauen Beweismaschinen"

Aufgabe 5. Finden Sie die Seitenlänge x des folgenden Quadrats.

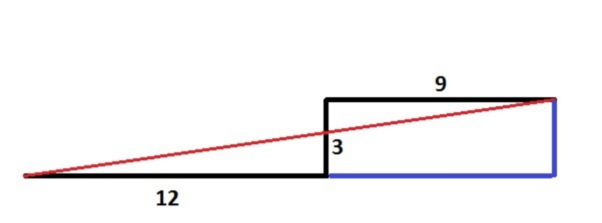


Lösung: **Geniale Idee:** Drehe die Skizze um ca. 45 Grad:



Es genügt, die rot eingezeichnete Diagonale des ursprünglichen Quadrats zu bestimmen.

Ergänze dazu die Stufe zu einem Rechteck und wende den Satz des Pythagoras an.



Die Länge der Diagonale ist dann gleich

$$\sqrt{21^2 + 3^2} = 3 \cdot \sqrt{7^2 + 1} = 15 \cdot \sqrt{2}$$

womit sich die Quadratseite zu 15 Längeneinheiten berechnet.

Ein Sargproblem

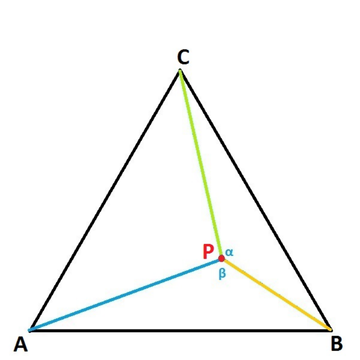
In den 1970er und 1980er Jahren wurden in der Sowjetunion Eingangsprüfungen für die Spitzenuniversitäten gestellt, bei denen sogenannte **Unerwünschte**, meist hochbegabte jüdische Schüler, von den Unis ferngehalten werden sollten.

Für die Aufnahmeprüfungen der **Mekh-Mat** (Fakultät für Mechanik und Mathematik) verwendete man dazu die streng geheimen **Sargprobleme**: Aufgaben, die sehr schwierig waren, aber eine einfache Lösung besaßen, welche nicht leicht zu entdecken war.

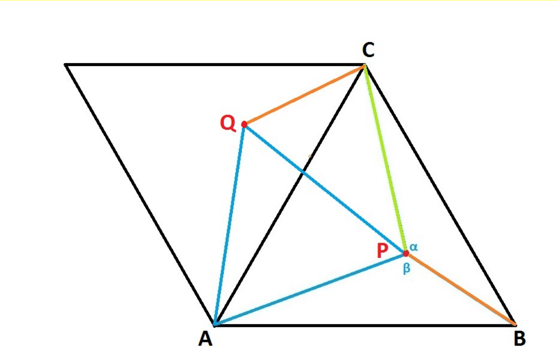
Auf diese Weise konnte man die Proteste der betroffenen Schüler leicht abweisen und behaupten, dass ihre Aufgaben auch nicht schwerer waren als die der anderen Kandidaten.

Idee: W-Seminar “Sargprobleme”

Aufgabe 6. In einem gleichseitigen Dreieck wird ein Punkt P gewählt und mit den Ecken A, B sowie C verbunden. Drücke die Innenwinkel des Dreiecks, das man aus den Strecken $[PA]$, $[PB]$ und $[PC]$ bilden kann mithilfe der Winkel $\alpha = \measuredangle BPC$ und $\beta = \measuredangle APB$ aus.

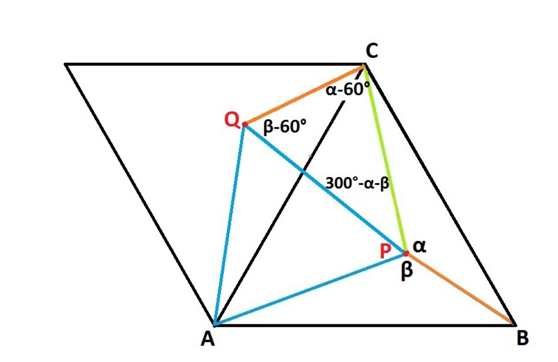


Lösung: **Geniale Idee:** Drehe das gleichseitige Dreieck um 60^o um A.



Es entsteht ein gleichseitiges Dreieck ΔAPQ und eine Kopie des gesuchten Dreiecks ΔPCQ.

Nun kann man die gesuchten Winkel leicht berechnen.



Die Winkelsumme rund um P ergibt $\measuredangle CPQ = 300^o - \alpha - \beta$.

Aus $\measuredangle AQC = \beta$ folgt dann $\measuredangle PQC = \beta - 60^o$.

Die Winkelsumme in ΔPCQ liefert schließlich $\measuredangle QCP = \alpha - 60^o$.

Etwas Theorie

Satz. In der Ebene seien zwei Drehungen mit den Drehzentren A bzw. B und den Drehwinkeln α bzw. β geben.

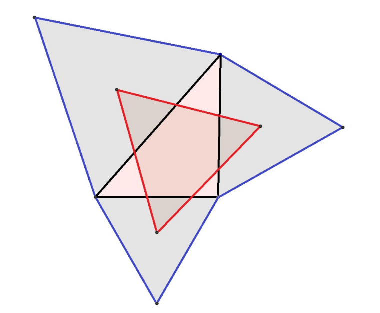
(a) Ist $\alpha + \beta$ kein Vielfaches von 360^o, so ist die Hintereinanderausführung der beiden Drehungen wieder eine Drehung, und zwar um den Winkel $\alpha + \beta$.

(b) Ist $\alpha + \beta$ ein Vielfaches von 360^o, so ist die Hintereinanderausführung der beiden Drehungen eine Verschiebung.

Idee: W-Seminare "Drehungen in der Ebene und im Raum" oder "Symmetrie in der Natur und der Mathematik"

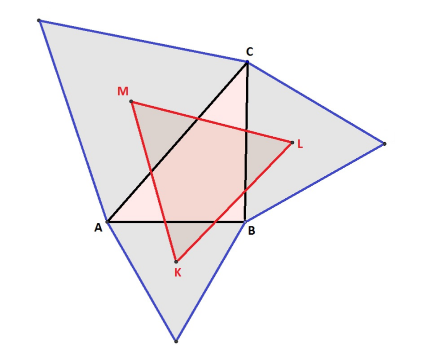
Das Napoleon-Dreieck

Aufgabe 7. Über den Seiten eines beliebigen Dreiecks werden gleichseitige Dreiecke errichtet.



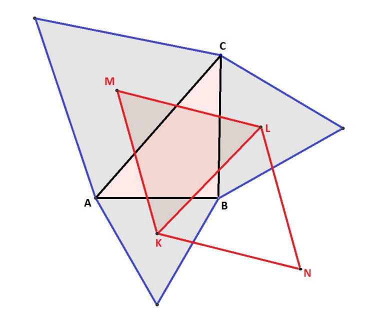
Beweisen Sie, dass die Mittelpunkte der drei gleichseitigen Dreiecke stets ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Zuerst benennen wir die Ecken des Dreiecks mit A, B, C und die Mittelpunkte der errichteten gleichseitigen Dreiecke mit K, L, M.



Dann betrachten wir die Hintereinanderausführung der drei Drehungen $\varrho(M, 120^o)$, $\varrho(L, 120^o)$ und $\varrho(K, 120^o)$. Nach dem Satz ist sie eine Translation. Da sie aber A fest läßt, ist sie die Identität.

Was passiert mit M bei dieser Hintereinanderausführung?

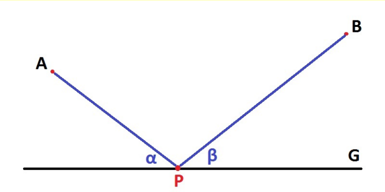


Bei $\varrho(M, 120^o)$ wird M auf M abgebildet. Bei $\varrho(L, 120^o)$ wird M auf N abgebildet. Bei $\varrho(K, 120^o)$ wird N auf M abgebildet.
Also gilt $\overline{LM} = \overline{LN}$ und $\overline{KM} = \overline{KN}$ sowie $\measuredangle MLN = \measuredangle NKM = 120^o$.
Im Drachenviereck $MLNK$ folgt $\measuredangle KML = 60^o$ und analog auch $\measuredangle MLK = \measuredangle LKM = 60^o$.

③ Beweis durch Wenden

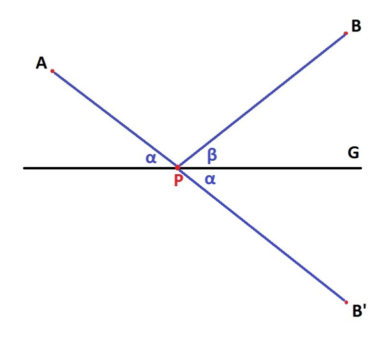
Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist
im Bau.

Aufgabe 8. Von einem Punkt A ist die kürzeste Verbindung zu einem Punkt B zu finden, die mindestens einen Punkt P einer gegebenen Gerade G enthält.



Beweisen Sie, dass die Winkel α und β am Punkt P gleich groß sind.

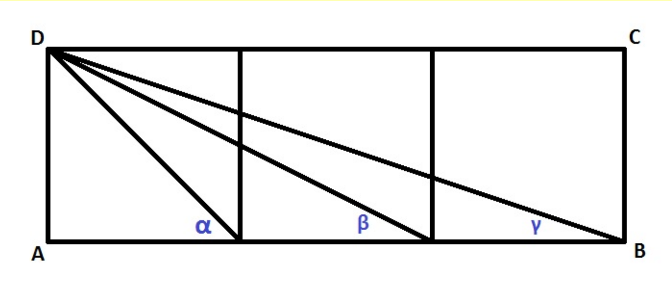
Lösung: Spiegle B an der Geraden G und erhalte B'.



Wegen $\overline{PB} = \overline{PB'}$ suchen wir also die kürzeste Verbindung zwischen A und B', und dies ist die Strecke $[AB']$.

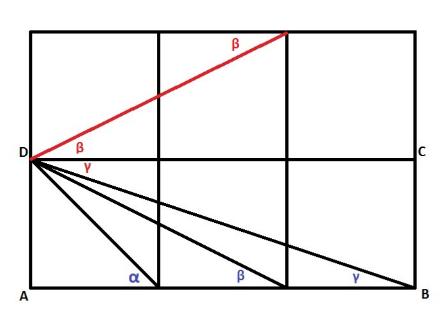
Aus der Gleichheit gegenüberliegender Winkel an Geradenkreuzungen und der Winkelerhaltung bei Spiegelungen folgt dann $\alpha = \beta$.

Aufgabe 9. Drei gleich große Quadrate grenzen horizontal aneinander. Bestimme die Summe $\alpha + \beta + \gamma$ der Winkel α, β, γ in der folgenden Zeichnung.



Geniale Idee: Spiegle an der oberen Kante der Quadrate!

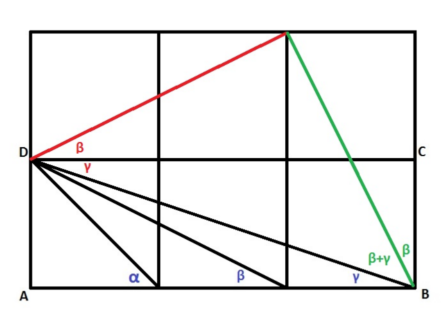
Lösung: Wenn wir die drei Quadrate und die mittlere Diagonale an der Oberkante spiegeln, erhalten wir folgende Figur.



Durch Spiegeln und Z-Winkel erhalten wir die rot eingezeichneten Winkel β und γ.

Geniale Idee: Ergänze die rote Linie durch eine weitere, so dass ein gleichschenkliges Dreieck entsteht!

Es entsteht folgende Figur:



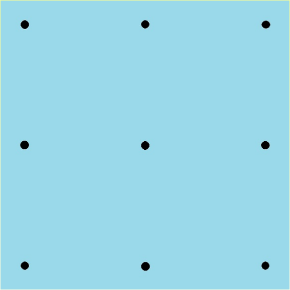
Der zweite Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks ist ebenfalls $\beta + \gamma$, und der dritte Winkel bei B ist offenbar β.

Insgesamt folgt $2\beta+2\gamma = 90^o$ und somit $\alpha+\beta+\gamma = 45^o+45^o = 90^o$.

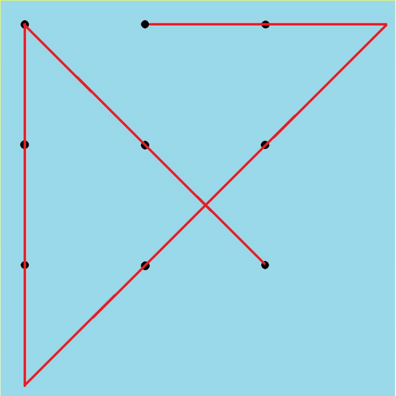
4 Über den Tellerrand gucken

Wenn eine Idee am Anfang nicht absurd klingt,
dann gibt es keine Hoffnung für sie.
(Albert Einstein)

Aufgabe 10. Finden Sie einen Streckenzug aus 4 Strecken, der die folgenden 9 Punkte enthält.

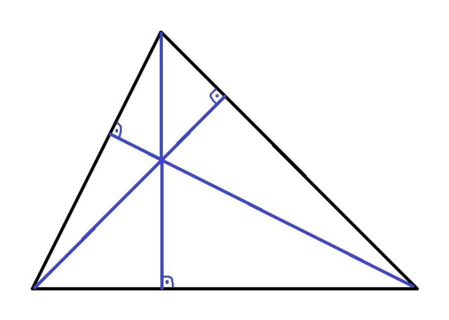


Lösung: Man muss die Strecken über die Figur hinausführen. Dann findet man z.B. folgende Lösung.



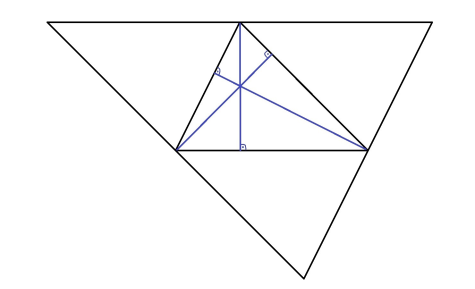
In einem kurzen Film wird gezeigt, wie man die 9 Punkte sogar mit 3 Stecken verbinden kann ohne abzusetzen.

Aufgabe 11. Beweisen Sie, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.



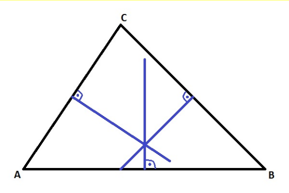
Geniale Idee: Zeichne Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die jeweils gegenüber liegenden Ecken.

Lösung: Wir konstruieren folgende Figur.



Die äußeren drei Dreiecke sind nach dem SWS-Satz kongruent zum inneren Dreieck.
Die Höhen des inneren Dreiecks sind daher die Mittelsenkrechten des äußeren Dreiecks, und die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Satz. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

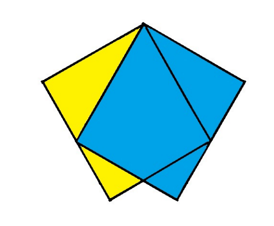


Beweis: Die Mittelsenkrechte von $[AB]$ ist die Menge aller Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind.
Also ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $[AB]$ und $[BC]$ von A, B und C gleich weit entfernt.
Insbesondere liegt er auf der Mittelsenkrechten von $[AC]$.

5 Die hohe Kunst der Hilfslinie

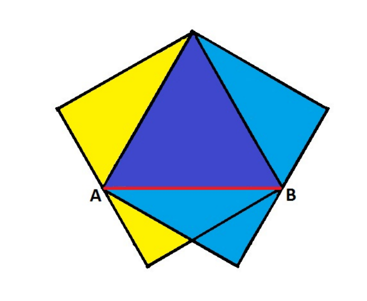
Dieses Computerspiel hat mein Leben ruiniert.
Jetzt habe ich nur noch zwei übrig.

Aufgabe 12. Zwei Ausgaben einer Zeitschrift liegen so übereinander, dass sich die Ecken und Kanten wie folgt berühren:



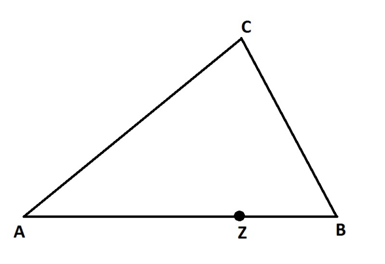
Bedeckt das blaue Heft mehr oder weniger als die Hälfte des gelben?

Lösung: Man verbindet die Punkte A und B mit einer **Hilfslinie**.



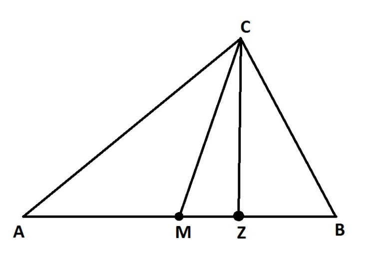
Das dunkelblaue Dreieck hat genau die halbe Fläche des blauen Hefts.
Also bedeckt das blaue Heft mehr als die Hälfte des gelben.

Aufgabe 13. Ein Bauer möchte sein dreieckiges Feld durch einen geraden Zaun so in zwei Felder teilen, dass jedes seiner Kinder gleich viel Ackerfläche erbt. Da beide Kinder den Zwetschgenbaum Z lieben, soll der Zaun von ihm ausgehen, so dass er an der Grenze beider Felder liegt.



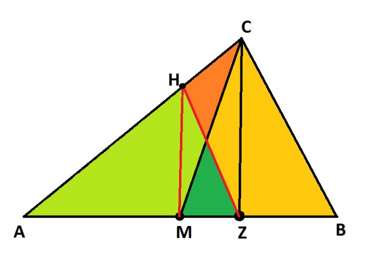
Wie kann man die Lage des Zauns konstruieren?

Lösung: Die erste offensichtliche Hilfslinie ist die Verbindungslinie von der Ecke C zum Baum Z. Sie teilt die Fläche aber nicht in zwei gleiche Teile.



Eine andere Möglichkeit ist, die Ecke C mit dem Mittelpunkt M der Seite $[AB]$ zu verbinden. Diese Linie halbiert die Fläche des Dreiecks, aber sie geht nicht durch Z.

Geniale Idee: Zeichne die Parallele zu $[CZ]$ durch M ein.

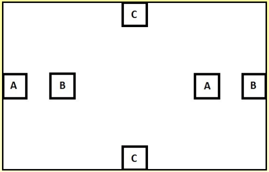


Die Verbindung ihres Endpunkts H mit Z ist der gesuchte Zaun:
Die beiden Dreiecke ΔHMZ und ΔHMC haben die gleiche Fläche.
Also haben auch das dunkelorange und das dunkelgrüne Dreieck die gleiche Fläche. Tauscht man das dunkelgrüne Dreieck gegen das dunkelorange ein, so bleibt die Flächengleichheit erhalten.

6 Alles Mögliche und Unmögliche

Mit dem neuen Team werden wir den Turnaround schaffen, und zwar um 360 Grad.

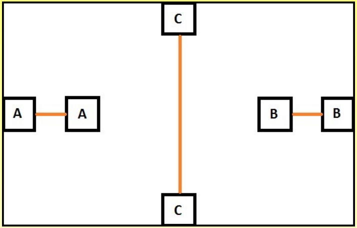
Aufgabe 14. Bei einem Leiterplattenlayout sind die Bauteile A, B und C jeweils zu verbinden. Die Leiterbahnen dürfen sich nicht kreuzen und nur innerhalb der Platine verlaufen.



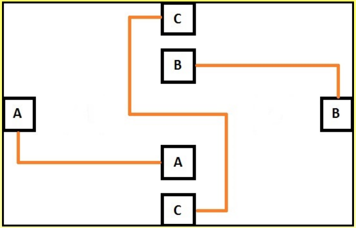
Kann man für diese Platine ein Layout finden?

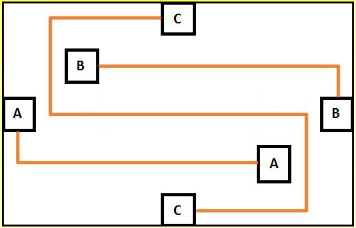
Geniale Idee: Löse zuerste ein einfacheres Problem und "deformiere" dann die Antwort.

Lösung: Wären die inneren Bauteile A und B vertauscht, so gäbe es eine sehr einfache Lösung.

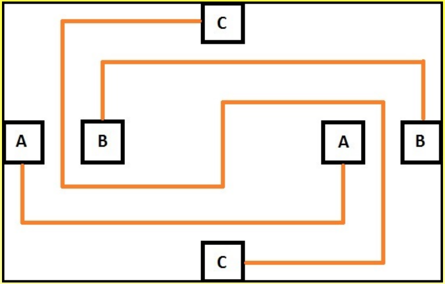


Nun bewege die beiden falsch platzierten Bauteile schrittweise an ihren richtigen Platz und modifiziere die Leiterbahnen entsprechend.





Schließlich bewege das rechte Bauteil A etwas nach oben und das linke Bauteil B etwas nach unten. Erhalte die Lösung:



Idee: Man kann auch die Unmöglichkeit bestimmter Leiterplattenlayouts beweisen. Dazu braucht man **Eulers Polyederformel**

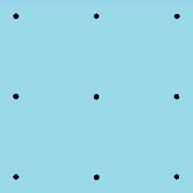
$$e + f = k + 2.$$

Obstgartenprobleme

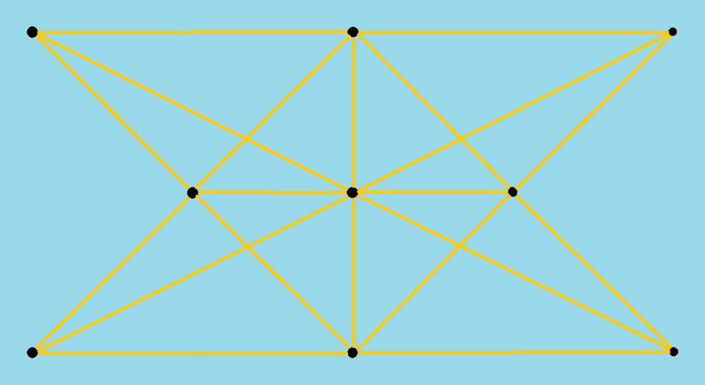
Your aid I want, nine trees to plant
In rows just half a score,
And let there be in each row three
Solve this: I ask no more.
(John Jackson, 1821)

Aufgabe 15. Neun Bäume sollen so in 10 Reihen gepflanzt werden, dass in jeder Reihe drei Bäume stehen.

Tipp: Der offensichtliche Versuch liefert nur 8 Dreierreihen.



Geniale Idee: Modifiziere den offensichtlichen Versuch, um zwei zusätzliche Dreierreihen von Bäumen zu erhalten.



Idee: Bestimme möglichst viele Maximalzahlen $r(n,k)$ von Punkten, die man in n Reihen zu je k Punkten anordnen kann.

THE END

**Das Problem mit dem niederbayrischen Essen ist,
dass man 5-6 Tage später schon wieder hungrig ist.**

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!