

# Aufbaukurs Mathemagie

**Martin Kreuzer**

Universität Passau

[martin.kreuzer@uni-passau.de](mailto:martin.kreuzer@uni-passau.de)

Lehrerfortbildung Mathematik

Universität Passau, 5.7.2022

## Inhaltsübersicht

- 1 Kopfrechnen
- 2 Modulorechnung
- 3 Zahlensystemumrechnung
- 4 Geometrische Rechnungen
- 5 Wahrscheinlichkeitsrechnung
- 6 Geheimcodeberechnung

**Mathemagier: Glasini**

a.k.a. StD Helmut Glas (ASG Passau)

## Die Macht der Mathemagie

Mithilfe der Mathemagie kann man berühmte unlösbare mathematische Probleme doch noch lösen, z.B. die

**Quadratur des Kreises.**

Man kann mit Mathemagie aber auch **schneller im Kopf rechnen** als mit einem Taschenrechner!

# 1. Kopfrechnen

Wir haben jetzt jeden vierten Deutschen geimpft.  
Diese Woche wird es noch jeder fünfte werden.

(Jens Spahn, 26.4.2021)

## Mathemagische Blitzrechnung

- (1) Die Zuschauer wählen eine dreistellige Zahl, z.B. **326**. Der Mathemagier schreibt sie zweimal hin.
- (2) Die Zuschauer wählen noch eine dreistellige Zahl, z.B. **564**. Der Mathemagier schreibt sie unter die erste.
- (3) Dann schreibt er eine Zahl unter die Kopie der 1. Zahl, z.B. **435**.
- (4) Der Mathemagier hat blitzschnell  $326 \cdot 564 + 326 \cdot 435 = 325674$  berechnet. Wie ist das möglich?

## Auflösung

Der Trick beruht auf einer geschickten Anwendung des **Distributivgesetzes**.

(1) Nachdem die Zuschauer die Zahlen  $a$  und  $b$  gewählt haben, fügt der Mathemagier die Zahl  $c = 999 - b$  hinzu.

(2) Dann gilt:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) = a \cdot 999 = a \cdot (1000 - 1) = 1000 \cdot a - a$$

(3) Das Ergebnis  $1000 \cdot a - a$  kann man mit einer einfachen Regel für die Ziffern von  $a$  sehr leicht berechnen: erst  $a - 1$  hinschreiben und dann das Tausenderkomplement  $1000 - a$ .

## Wir spielen Tic-Tac-Toe

Auf der Tafel ist ein  $3 \times 3$  Spielfeld für eine Partie **Tic-Tac-Toe**.

- (1) Der Assistent zeigt 9 große Karten und legt sie verdeckt hin. Ein Zuschauer ist Gegenspieler. Der Mathemagier postet eine Vorhersage.
- (2) Der Mathemagier wählt eine Karte und spielt sie verdeckt aus. Auch der Zuschauer wählt eine Karte und spielt sie offen aus.
- (3) Abwechselnd wird weitergespielt, wobei die Karten des Mathemagiers verdeckt und die des Zuschauers offen ausgelegt werden.
- (4) Am Ende deckt der Mathemagier seine Vorhersage auf: das Muster der offenen und verdeckten Karten stimmt exakt!
- (5) Als nunmehr alle verdeckten Karten umgedreht werden, entsteht ein **magisches  $3 \times 3$ -Quadrat**. Unglaublich!

## Auflösung

- (1) Die Karten waren geordnet: 1 (= As), 8, 2, 7, 3, 4, 5, 6, 9.
- (2) Der Zauberer nimmt die 7. Karte (eine 5). Dann gibt es zwei Teilstapel: 1, 8, 2, 7, 3, 4 und 6, 9.
- (3) Wählt der Zuschauer ein Kantenfeld, so legt der Assistent den ersten Stapel auf den zweiten. Ergebnis: 1, 8, 2, 7, 3, 4, 6, 9.
- (4) Wählt der Zuschauer ein Eckfeld, so legt der Assistent den zweiten Stapel auf den ersten. Ergebnis: 6, 9, 1, 8, 2, 7, 3, 4.
- (5) Der Rest des Spiels wird vom Zauberer jetzt erzwungen. Bis auf eine Drehung ergibt sich das Muster (X = verdeckt, O = offen):

O	X	O
O	X	X
X	O	X

## Die heiligen vier Könige

- (1) Die Zuschauer wählen völlig frei einen der vier Könige.
- (2) Genau der gewählte König erscheint!
- (3) Seine Rückseite ist auch noch **rot** statt **blau**.
- (4) Die anderen Könige hatte der Mathemagier

**gar nicht dabei!**



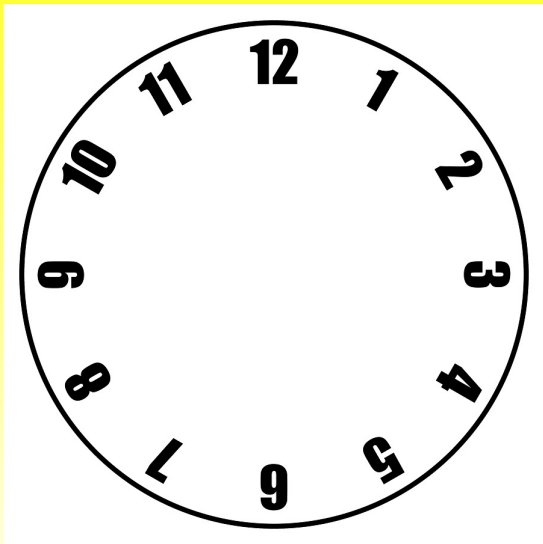
## 2. Modularechnung

Gib einem Mann eine Maske,  
dann wird er Dir die Wahrheit sagen.

(Oscar Wilde)

### Wer hat an der Uhr gedreht?

- (1) Auf der Leinwand ist eine große Uhr zu sehen.
- (2) Ein Zuschauer wählt aus einem Kartenstapel seine Lieblingsuhrzeit  $z \in \{1, 2, \dots, 12\}$ .
- (3) Der mathemagische Assistent erhält die Karte und zeigt sie den Zuschauern.



- (4) Der Zauberer deutet auf eine Uhrzeit während der Assistent die Karte mit der Zahl  $z$  zeigt.
- (5) Nacheinander zeigt der Assistent Karten mit den Zahlen  $z+1$ ,  $z+2$ , ... Die Zuschauer rufen jedesmal **weiter** oder **stop**.
- (6) Geht es **weiter**, zeigt der Zauberer auf eine andere Uhrzeit.
- (7) Wenn der Assistent die Zahl 20 zeigt, rufen die Zuschauer **stop**. In diesem Augenblick zeigt der Zauberer gerade auf die Uhrzeit  $z$ .

**Wie ist das möglich?**

## Auflösung

- (1) Als erste Zahl zeigt der Assistent  $z \leq 12$ .
- (2) Als achte Zahl zeigt der Assistent  $z + 7 \leq 19$ . Die ersten acht Uhrzeiten, auf die der Zauberer deutet, sind also irrelevant.
- (3) Die  $k$ -te Zahl, die der Assistent zeigt, ist  $z + k - 1 = 20$  genau für  $k = 21 - z$ .
- (4) Also gilt:  $k = 9 \Leftrightarrow z = 12$  und  $k = 10 \Leftrightarrow z = 11$  etc.
- (5) Ab der 9. Zahl zeigt der Mathemagier der Reihe nach also auf 12, 11, 10, ... Uhr.

## Die mathemagische Partnervermittlung

- (1) Die vier Damen und die vier Könige werden entgegengesetzt sortiert in zwei verdeckte Stapel gegeben.
- (2) Jetzt beginnt das **Mischen**. Ein Mischvorgang besteht darin, die oberste Karte eines Viererstapels nach unten zu bringen.
- (3) Für jeden Buchstaben des Worts **ABRAKADABRA** bestimmen die Zuschauer, ob links oder rechts gemischt wird.
- (4) Die obersten beiden Karten werden als Paar beiseite gelegt. Dann werden die restlichen Dreierstapel wieder genauso gemischt.
- (5) Das Ganze wird wiederholt bis sich vier verdeckte Paare ergeben. Diese werden aufgedeckt.

Wunderbarerweise sind genau die **passenden Partner** zusammen!

## Der chinesische Restsatz

Seien  $n_1, n_2, \dots, n_k$  paarweise teilerfremde Zahlen und  $a_1, a_2, \dots, a_k$  seien Reste, die beim Teilen durch diese Zahlen entstehen können, also  $a_i \in \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$ .

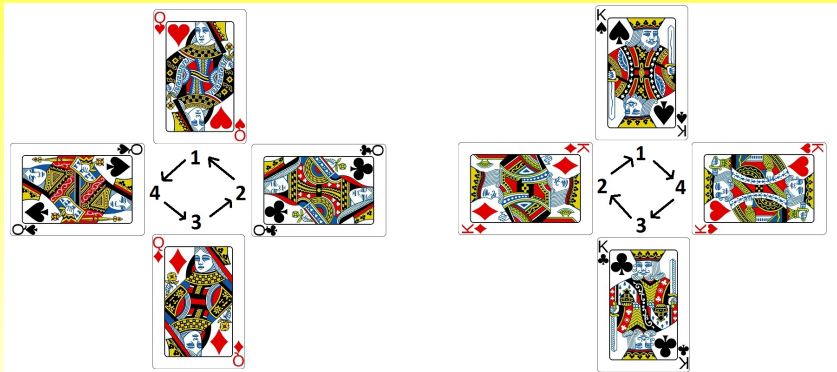
Dann gibt es genau eine Zahl  $b \in \{0, 1, \dots, n_1 \cdot \dots \cdot n_k - 1\}$  so dass  $b$  für  $i = 1, \dots, k$  beim Teilen durch  $n_i$  den Rest  $a_i$  läßt.

**Beispiel.** Sei  $n_1 = 3$  und  $n_2 = 4$ . Dann gibt es genau eine Zahl  $b \in \{0, 1, \dots, 11\}$  mit  $b \equiv 2 \pmod{3}$  und  $b \equiv 3 \pmod{4}$ , nämlich die Zahl  $b = 11$ .

Beachte nun, dass **ABRAKADABRA** genau 11 Buchstaben hat!

# Auflösung

(1) Die beiden Viererstapel werden wie folgt orientiert hingelegt.



- (2) Einmal **mischen** dreht den linken Stapel nach links und den rechten nach rechts.
- (3) Der linke Stapel wird  $k$  mal, der rechte  $11 - k$  mal gemischt.
- (4) Wegen  $11 - k = 12 - k - 1 \equiv -k - 1 \pmod{4}$  kann man den rechten Stapel erst einmal nach links drehen, wonach die Farben parallel sind.
- (5) Dann wird der linke Stapel  $k$  mal nach links und der rechte  $-k$  mal nach rechts, also auch  $k$  mal nach links gedreht. Die Farben bleiben parallel und die gleichen Farben sind oben.
- (6) Nach Wegnahme der beiden oberen Karten bleiben Dreierstapel, wobei  $2 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 2$  und  $4 \rightarrow 3$  gilt.
- (7) Wegen  $11 \equiv -1 \pmod{3}$  und  $11 \equiv -1 \pmod{2}$  wiederholt sich das Argument noch zweimal.



## Der Streit der Fische

- (1) Die Fische streiten darüber, wer größer ist.
- (2) Je nachdem, wer unten ist, wirkt größer.
- (3) Am Ende sind sie in Wirklichkeit gleich groß!

Es handelt sich also um eine **optische Täuschung**.

### 3. Zahlensystemumrechnung

2 mal 3 macht 4, widdewiddewitt und 3 macht neune.

Ich mach' mir die Welt wie sie mir gefällt.

(Pippi Langstrumpf)

#### Der $3 \times 3 \times 3 = 27$ Kartentrick

- (1) Ein Zuschauer wählt seine Lieblingszahl  $z \in \{2, \dots, 26\}$  und zieht eine geheime Karte.
- (2) Der Zauberer macht **drei mal drei** Neunerstapel und es wird jeweils verraten, in welchem Stapel die geheime Karte ist.
- (3) Am Ende ist die  $z$ -te Karte genau die geheime Karte!

## Auflösung

**(1)** Wir möchten, dass am Ende  $z - 1$  Karten über der geheimen Karte liegen. Dazu stellen wir zuerst die Zahl  $z - 1$  im Dreiersystem dar und erhalten  $z - 1 = [c_9 c_3 c_1]_3$  mit  $c_9, c_3, c_1 \in \{0, 1, 2\}$ .

**(2)** Beim ersten Auszählen in drei Stapel und dem anschließenden Zusammenfügen wird festgelegt, wie viele Karten modulo 3 über der gesuchten Karte liegen. Für das Zusammenfügen gilt also:

$c_1 = 0 \implies$  Stapel mit der gesuchten Karte oben einordnen

$c_1 = 1 \implies$  Stapel mit der gesuchten Karte in die Mitte

$c_1 = 2 \implies$  Stapel mit der gesuchten Karte unten einordnen

**(3)** Beim zweiten Auszählen und Zusammenfügen wird festgelegt, wie viele Karten modulo 9 über der gesuchten Karte liegen.

Für das zweite Zusammenfügen gilt also:

$c_3 = 0 \implies$  Stapel mit der gesuchten Karte oben einordnen

$c_3 = 1 \implies$  Stapel mit der gesuchten Karte in die Mitte

$c_3 = 2 \implies$  Stapel mit der gesuchten Karte unten einordnen

**(4)** Schließlich wird die gesuchte Karte beim dritten Zusammenfügen in den richtigen Neunerblock gebracht.

Für das dritte Zusammenfügen gilt also:

$c_9 = 0 \implies$  Stapel mit der gesuchten Karte oben einordnen

$c_9 = 1 \implies$  Stapel mit der gesuchten Karte in die Mitte

$c_9 = 2 \implies$  Stapel mit der gesuchten Karte unten einordnen

**(5)** Am Ende liegen genau  $z - 1$  Karten über der gesuchten Karte.

Weitere Erklärungen gibt es im [Mathemuseum](#).

## Daumen hoch!

Zur Auflockerung gibt es etwas **gymnastische Zauberei**.

Niemand hat sich dafür interessiert,  
wer ich bin.  
Bis ich eine Maske aufsetzte.  
(**Batman** in „The Dark Knight Rises“)

**PAUSE!**

## 4. Geometrische Berechnungen

Ich bin extra Magier geworden um herauszufinden  
wie ich das mache.  
(Tommy Wonder)

### Geometrische Blitzsummierung

- (1) Die Zuschauer bestimmen 5 zufällige 5-stellige Zahlen und der Mathemagier schreibt eine Vorhersage auf.
- (2) Dann werden neue Zahlen gebildet, und zwar eine Ziffer aus der ersten Zahl, eine Ziffer aus der zweiten Zahl, u.s.w. Die verbrauchten Ziffern werden gestrichen. So werden 5 neue Zahlen gebildet.
- (3) Der Mathemagier hat ihre Summe korrekt vorhergesagt!

## Auflösung

(1) Der Trick ist, die gegebenen Zahlen an der langen Diagonalen zu spiegeln, d.h. die **transponierte Matrix** zu bilden!

	7	1	3	5	6		7	6	1	9	6
	6	2	4	9	3		1	2	2	8	8
Z.B. aus	1	2	3	4	5	wird	3	4	3	3	9
	9	8	3	2	5		5	9	4	2	4
	6	8	9	4	2		6	3	5	5	2

(2) Die **zufällige** Matrix hat die gleichen Zahlen in den Spalten wie die transponierte Matrix. Das Summieren liefert also das Gleiche.

(3) Der Mathemagier musste also nur die **Quersummen** der ursprünglichen Zahlen berechnen und die Überträge addieren.



## Das mathemagische Dreieck

(1) Es gibt Kartenstapel mit roten, blauen und gelben Rücken. Ein Zuschauer legt eine Reihe von 10 zufällig gewählten Farben aus und der Mathemagier macht eine Vorhersage.

(2) Nun wird eine versetzte Neunerreihe gebildet nach zwei Regeln:

- unter zwei gleiche Farben kommt dieselbe Farbe
- unter zwei verschiedene Farben kommt die dritte Farbe

(3) Als nächstes wird eine Achterreihe ebenso versetzt gelegt, dann eine Siebenerreihe, etc.

(4) Als letztes bleibt eine Reihe aus einer Karte.

**Der Mathemagier hat ihre Farbe korrekt vorhergesagt!**

## Auflösung

- (1) Wir identifizieren die Rückenfarben **rot**, **blau** und **schwarz** mit den Zahlen 0, 1, 2 modulo 3.
- (2) Die Farbe der unter zwei Karten  $x, y$  zu legenden neuen Karte  $z$  ist dann  $z = -x - y = -(x + y)$  modulo 3.
- (3) In der zweiten Reihe stehen also **minus** die Summen der Elemente der ersten Reihe, in der dritten Reihe **plus** entsprechende Summen von Kartenfarben der ersten Reihe, etc. In der 10. und letzten Reihe steht dann **minus** eine gewisse Summe von Farben der ersten Reihe.
- (4) In der dritten Reihe steht unter  $x_0, x_1, x_2$  die Summe  $(x_0 + x_1) + (x_1 + x_2) = x_0 + 2x_1 + x_2$ . In der vierten Reihe steht (bis aufs Vorzeichen)  $x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3$ , etc. In der zehnte Reihe steht also  $-z = x_0 + \binom{9}{1} x_1 + \binom{9}{2} x_2 + \cdots + \binom{9}{9} x_9$  modulo 3.

**(5)** Nun verwenden wir folgenden **Hilfssatz**:

Die Zahl 3 teilt alle Binomialkoeffizienten  $\binom{9}{i}$  mit  $i \in \{1, \dots, 8\}$ .

**Beweis:** Wegen der Symmetrie der Binomialkoeffizienten müssen wir nur  $i = 1, 2, 3, 4$  betrachten. In  $\binom{9}{i} = 9 \cdot \dots \cdot (9 - i + 1) / (1 \cdot \dots \cdot i)$  stehen im Zähler mindestens 2 Primfaktoren 3 und im Nenner höchstens 1. Also bleibt beim Kürzen mindestens ein Faktor 3 im Zähler übrig.

**(6)** Wegen (3) und (5) gilt für die letzte Farbe  $z = -(x_0 + x_9)$ , d.h. die letzte Farbe wird nach den beiden Regeln aus den äußersten beiden Karten der ersten Reihe bestimmt.

## Das Hexaflexagon

- (1) Der Mathemagier führt das **Hexaflexagon** vor.
- (2) Welche Farben haben die Seiten der Dreiecke denn jetzt?
- (3) Wie viele Farben sind es? Wie viele Dreiecke?

Dazu noch lustige Youtube-Videos (mit deutschen Untertiteln):

<https://www.youtube.com/watch?v=VIVlegSt81k>

<https://www.youtube.com/watch?v=paQ10POrZh8>

## 5. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Sie können sich jetzt selbst überzeugen,  
dass die ganze Schummelei  
absolut ehrlich ist.  
(Tommy Wonder)

**Ich gewinne immer!**

- (1) Ein Zuschauer wählt ein Farbmuster  $XYZ$  mit  $X, Y, Z \in \{R, S\}$  wobei  $R = \text{rot}$  und  $S = \text{schwarz}$  gelte.
- (2) Der Mathemagier wählt ebenfalls ein solches Muster.
- (3) Aus einem gut gemischten Kartenstapel werden nun die Karten der Reihe nach aufgedeckt.

(4) Sobald eines der beiden Farbmuster auftaucht, erhält der entsprechende Spieler einen Punkt.

(5) Wer zuerst fünf Punkte hat, gewinnt.

**Der Mathemagier gewinnt immer! Warum?**

## Auflösung

Der **M**athemagier kann sein Farbmuster stets so wählen, dass seine **G**ewinnchance  $> 50\%$  ist!

<b>Z</b>	<i>RRR</i>	<i>RRS</i>	<i>RSR</i>	<i>RSS</i>	<i>SRR</i>	<i>SRS</i>	<i>SSR</i>	<i>SSS</i>
<b>M</b>	<i>SRR</i>	<i>SRR</i>	<i>RRS</i>	<i>RRS</i>	<i>SSR</i>	<i>SSR</i>	<i>RSS</i>	<i>RSS</i>
<b>G</b>	$7/8$	$3/4$	$2/3$	$2/3$	$2/3$	$2/3$	$3/4$	$7/8$

## Beispiel

Sei  $Z = SSR$  und  $M = RSS$ .

- (1) Welche Farbe kam vor  $SSR$ ? Im Fall von  $SSSR$  gewann keiner, aber im Fall von  $RSSR$  gewann  $M$ .
- (2) Welche Farbe kam davor? Bei  $RSSSR$  gewann  $M$ , bei  $SSSSR$  und  $SRSSR$  und  $RRSSR$  gewann  $M$  auch bereits.
- (3) In 3 von 4 Fünftupeln, die mit einem Sieg von  $Z$  enden, gewann  $M$  also kurz vorher.
- (4) Wenn also nicht am Anfang  $SSR$  oder  $SSSR$  oder  $SSSSR$  etc. kommt, so gewinnt  $M$  vor  $Z$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass  $M$  verliert, ist demnach  $1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots = 1/4$ .

## Der ausgetrickste Zufall

- (1) Es wird ein zufällig gewähltes Blatt verwendet, das aus einer geraden Anzahl von Karten besteht.
- (2) Der Mathemagier sagt eine Zahl voraus.
- (3) Das Blatt wird zufällig mit folgenden Operationen gemischt:
  - (a) Abheben.
  - (b) Ein Pack aus einer geraden Zahl Karten von oben abnehmen und umgedreht wieder auf den Stapel legen.
  - (c) Eine ungerade Anzahl an Karten herunterzählen und den Reststapel darauf legen.
- (4) Zwei Teilstapel werden ausgezählt und verschieden orientiert zusammengefügt. **Der Mathemagier hat die Punktesumme der sichtbaren Kartenwerte korrekt vorhergesagt!**



## Auflösung

(1) Die ursprünglichen Karten waren so angeordnet, dass die Werte der Zahlen an den geraden und an den ungeraden Positionen jeweils **57** ergeben.

(2) Bei den Mischoperationen gibt es eine **Invariante**:  
**Wenn man jede zweite Karte umdreht, addieren sich die sichtbaren Kartenwerte jeder Seite des Blatts zu 57.**

(3) Beim **Abheben** bleibt die Invariante offensichtlich erhalten. Beim **Umdrehen** eines geradzahligen Packs kommen Karten mit gerader Position an eine ungerade Position und umgekehrt. Diese Karten werden aber auch umgedreht, so dass die Summe der am Ende sichtbaren Werte an den geraden Stellen um genauso viel steigt (oder fällt) wie die an den ungeraden Stellen fällt (oder steigt).

**Beispiel:** Eine sichtbare 5 ganz oben und eine unsichtbare 2 darunter werden umgedreht.

- (a) Die sichtbare 5 im ungeraden Teil wird zur unsichtbaren 5 im geraden Teil. Dreht man am Ende den geraden Teil um, zählt die 5 wieder bei den sichtbaren Kartenwerten mit.
- (b) Genauso folgt, dass die 2 auch nach dem Wenden nicht bei den sichtbaren Kartenwerten mitzählt.
- (4) Analog überlegt man sich, die die Invariante bei Operation (c) ebenfalls erhalten bleibt.

Am Ende macht der Mathemagier noch vor, wie man auf die gleiche Weise auch die **Kartenfarben sortieren** kann.

## Eine milde Spende

- (1) Ein Zuschauer leiht dem Mathemagier einen Geldschein. Dieser gibt ihn in die **Zaubermappe**.
- (2) Nach dem Schließen der Mappe vollführt der Mathemagier einen **Zauberspruch**.
- (3) Als die Zaubermappe wieder geöffnet wird, ist der Geldschein verschwunden.

**War es eine milde Spende für bedürftige Mathemagier?**

## 6. Geheimcodeberechnungen

Zauberer und Politiker haben etwas gemeinsam.  
Sie lenken uns davon ab, was sie wirklich tun.  
(Ben Okri)

### Mutus Nomen Dedit Cocis

- (1) Der Mathemagier legt 10 zufällige Kartenpaare auf den Tisch.
- (2) Einige Zuschauer merken sich jeweils ein Paar.
- (3) Der Zauberer legt die Karten zu einer  $4 \times 5$  Matrix aus.
- (4) Sobald ein Zuschauer die beiden Zeilen angibt, in der ein gemerktes Paar liegt, kann der Mathemagier das Kartenpaar nennen.

## Auflösung

(1) Der Mathemagier legt die Kartenpaare nach folgendem Schema aus:

<i>M</i>	<i>U</i>	<i>T</i>	<i>U</i>	<i>S</i>
<i>N</i>	<i>O</i>	<i>M</i>	<i>E</i>	<i>N</i>
<i>D</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>I</i>	<i>T</i>
<i>C</i>	<i>O</i>	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>S</i>

wobei gleiche Buchstaben jeweils zu einem Paar gehören.

(2) Jedes Buchstabenpaar entspricht genau einer Zeile/Zeile Kombination.

Dieser mathemagische Trick wurde **1769** von **Gilles-Edme Guyot** erfunden.

## Schwerwiegender Münzzauber

- (1) Zuerst erhält ein Kandidat zwölf 20 Cent Münzen aus einem Münztablett.
- (2) Diese Münzen werden zu  $5+7$  auf die beiden Hände verteilt, so dass der Mathemagier nicht sehen kann, welche Seite mehr Münzen enthält.
- (3) Nun werden die Beträge in den beiden Händen jeweils mit 13 multipliziert und die Ergebnisse werden addiert.
- (4) Der Mathemagier hat Summe bereits vorhergesagt:  $240 \times 13 = 3120$  Cent. Das ist doch kein Wunder!

**Aber der Mathemagier konnte auch herausfinden, aus welcher Seite die 5 Münzen und auf welcher die 7 Münzen sind!**

**THE END**

Das Leben ist kurz.  
Also lächle  
solange Du noch Zähne hast.

**Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!**